ESPACIOS MEDIBLES Y ESPACIOS DE MEDIDA

Ejercicio 1. Sean $Y \subset X$ conjuntos. Sea, para cada $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$,

$$\mathcal{C}_Y = \{Y \cap E : E \in \mathcal{C}\}.$$

Demostrar:

a) Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre X, entonces $\mathcal{A}_Y$ es una σ-álgebra sobre Y. Se llama σ-álgebra inducida por $\mathcal{A}$ en Y.

b) Si además $Y \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}_Y = \{B \in \mathcal{A} : B \subset Y\}$

c) Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, entonces $\mathcal{A}_Y = \sigma(\mathcal{C}_Y)$.

d) Si X es un espacio topológico, $Y \subseteq X$ y en Y consideramos la topología inducida por X, entonces la σ-álgebra de Borel de Y es la σ-álgebra inducida en Y por la σ-álgebra de Borel de X.

Ejercicio 2. Sean X e Y dos conjuntos y sea $\varphi : X \to Y$ una aplicación. Probar que si $(X, \mathcal{A})$ es un espacio medible, entonces

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{E \subseteq Y : \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

es una σ-álgebra sobre Y. Se llama σ-álgebra imagen de $\mathcal{A}$ por φ.

Ejercicio 3. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de medidas sobre $\mathcal{A}$ y $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de números no negativos. Probar que la aplicación μ dada por

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n(A)$$

es una medida sobre $\mathcal{A}$. En el caso particular de $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ y

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \delta_{x_n},$$

probar que:

a) μ es finita si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ converge.

b) Si $\lambda_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces μ es σ-finita si y solo el valor de cada termino de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se repite a lo sumo un número finito de veces.

Ejercicio 4. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, Y un conjunto, $\varphi : X \to Y$ una aplicación y $\varphi(\mathcal{A})$ la σ-álgebra imagen de $\mathcal{A}$ por φ.

a) Sea $\nu : \varphi(\mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ definida por $\nu(E) = \mu(\varphi^{-1}(E))$ para cada $E \in \varphi(\mathcal{A})$. Probar que ν es una medida sobre $\varphi(\mathcal{A})$. Se llama medida imagen de μ por φ y se denota por $\varphi(\mu)$.

b) Sea Z otro conjunto y $\psi : Y \to Z$ una aplicación. Probar que $\psi(\varphi(\mu)) = (\psi \circ \varphi)(\mu)$.

Ejercicio 5. Sea $\varphi : X \to Y$ y $a \in X$. Describir la medida imagen $\varphi(\delta_a)$, siendo δ_a la delta de Dirac en a sobre la σ-álgebra $\mathcal{P}(X)$.

Ejercicio 6. Sea X un conjunto, $\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E \text{ contable o } E^c \text{ contable}\}$ y $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ dada por

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \text{ es contable;} \\ 1, & \text{si } E \text{ no es contable.} \end{cases}$$

a) Comprobar que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

b) Probar que μ es una medida sobre $\mathcal{A}$.

c) Demostrar que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida completo.

Ejercicio 7. Sea X un conjunto, $a \in X$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{a\}, X \setminus \{a\}\}$ y δ_a la medida delta de Dirac en a.

a) Probar que $(X, \mathcal{A}, \delta_a)$ es completo si y solo si X tiene a lo sumo dos puntos.

b) Probar que la compleción de $(X, \mathcal{A}, \delta_a)$ es $(X, \mathcal{P}(X), \delta_a)$.

Ejercicio 8. Sea $a_1 = 0$ y $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n-1}$ para $n = 2, 3, \ldots$ Sea

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} D\Big((a_n, 0); \tfrac{1}{n}\Big) \subseteq \mathbb{R}^2,$$

donde $D(z; r)$ es el disco abierto de centro $z \in \mathbb{R}^2$ y radio $r > 0$. Demostrar que A es un abierto conexo no acotado de medida de Lebesgue finita. ¿Existen en $\mathbb{R}$ abiertos conexos no acotados de medida finita? ¿Y abiertos no acotados de medida finita?

Ejercicio 9. Sea

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{si } |x| > 4; \\ \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leq x \leq 4; \\ -\sqrt{-x}, & \text{si } -4 \leq x < 0. \end{cases}$$

Calcular $m_F(I)$ para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.