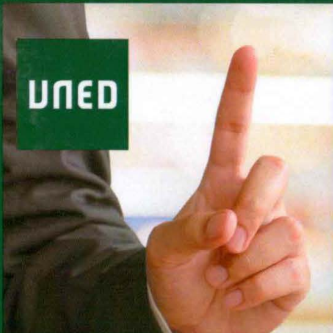
UNED

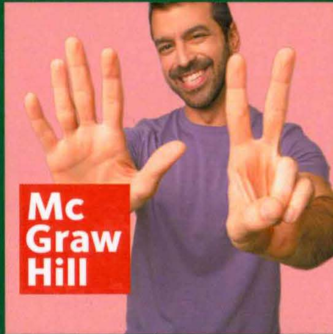


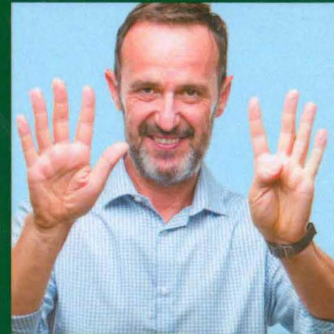
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA LAS CIENCIAS SOCIALES

EJERCICIOS RESUELTOS

María del Carmen García Llamas
Francisco Javier Palencia González





McGraw Hill

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA LAS CIENCIAS SOCIALES. EJERCICIOS RESUELTOS

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIOS RESUELTOS

María del Carmen García Llamas
Francisco Javier Palencia González

UNED

McGraw Hill

MADRID . MILÁN . LONDRES . MÉXICO D.F. . SYDNEY . SINGAPUR . TAIPÉI .
SHANGHÁI . SEÚL . BEIJING . HONG KONG . KUALA LUMPUR . BANGKOK . NUEVA YORK .
CHICAGO . DUBUQUE . LOS ÁNGELES . COLUMBUS . BOGOTÁ . NUEVA DELHI . TORONTO . DUBÁI

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA LAS CIENCIAS SOCIALES. EJERCICIOS RESUELTOS

McGraw-Hill/Interamericana de España, S.L.
Edificio Oasis, 1.a planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

ISBN (impreso) 978-84-486-1827-8
ISBN (VitalSource) 978-84-486-2012-7
Depósito legal: M-21457-2021

Editora: Cristina Sánchez Sainz-Trápaga
Gerente de Ventas Universidad: Pere Campanario Oliver
Director General Sur de Europa: Álvaro García Tejeda
Diseño de cubierta: Mar Nieto Novoa
Impresión: Liber DIgital, S.L.
1234567890 - 21 22 23 24 25

MIXTO
Papel procedente de fuentes responsables
FSC™ C134275

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

A todos los que han estado y están en primera línea.

Gracias por vuestro esfuerzo.

Índice general

Índice de figuras

Presentación

Este libro de ejercicios está elaborado especialmente para dar respuesta a la demanda de los estudiantes de la asignatura de Fundamentos Matemáticos de las Ciencias Sociales del grado en Turismo de la UNED. Para ellos es especialmente importante disponer de una gran variedad de ejercicios resueltos por tratarse de estudios a distancia. Las matemáticas son una de las materias que mayores dificultades plantean a la hora de estudiar de forma autónoma, y más concretamente la resolución de ejercicios.

Nuestro objetivo ha sido proporcionar un número suficiente de ejercicios totalmente resueltos que vayan recorriendo los distintos conceptos estudiados en la asignatura. Hemos procurado comenzar con ejercicios desarrollados paso a paso y con alguna indicación teórica, y hemos intentado incluir un número suficiente de ejercicios resueltos para que el estudiante pueda practicar y afianzar los conocimientos estudiados.

El texto está estructurado en dos bloques. El primero se dedica al estudio de conceptos básicos de álgebra desarrollados en dos temas, uno sobre cálculo matricial, y otro de aplicación de los conceptos estudiados a la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. El segundo bloque se centra en conceptos de cálculo, empezando con la introducción de los conceptos fundamentales sobre la definición de funciones reales de variable real. Poco a poco se va avanzando en los conceptos de límite y derivada para estudiar finalmente las aplicaciones de la derivación a la representación gráfica de funciones. Se cierra este bloque con un capítulo dedicado al estudio de la integral y su aplicación al cálculo de áreas delimitadas por funciones.

Hemos querido que los estudiantes que usen el texto no tengan la necesidad de buscar conocimientos previos en otros textos y por ello hemos introducido un capítulo inicial dedicado a repasar conceptos básicos de matemáticas que, por nuestra experiencia hemos podido comprobar que muchas veces se han olvidado por falta de uso. Esta misma idea es la que nos ha guiado en la metodología usada en todo el texto. Se han ido introduciendo los conceptos bajo el supuesto de que el estudiante los abordaba por primera vez.

Hemos tenido en cuenta las observaciones que a través de los cursos virtuales nos han hecho llegar tanto estudiantes como tutores ya que esto permite una mejora del resultado final. En este sentido hemos de decir que estamos encantados de recibir las propuestas de mejora que nos quieran hacer llegar tanto estudiantes como profesores.

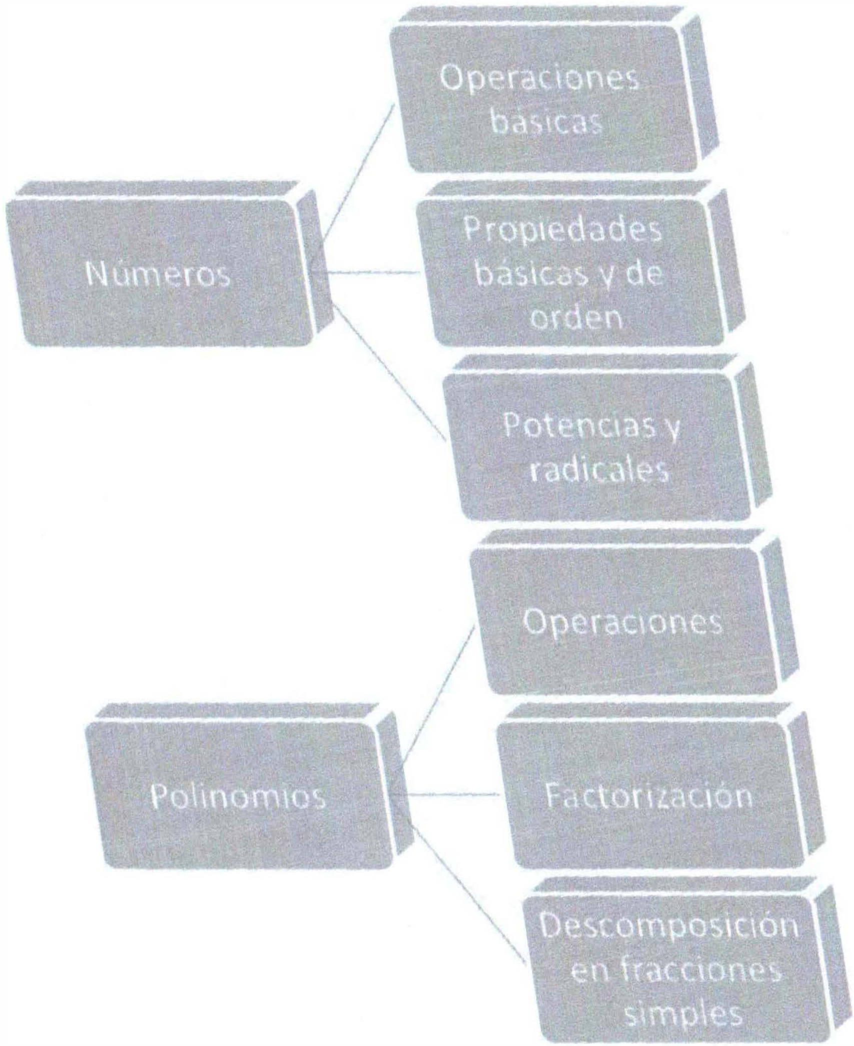
Si bien es cierto, como hemos indicado al principio, que el texto está escrito pensando especialmente en los estudiantes de turismo, creemos que también puede ser de gran ayuda para cualquier estudiante que necesite unos conocimientos básicos de matemáticas en el campo de las ciencias sociales ya que los temas tratados cubren los conceptos fundamentales del álgebra y el cálculo.

Los autores

Julio 2021

Capítulo 1

Conceptos Básicos



Problema 1.1. Comprueba si dados los números naturales $x = 7$ e $y = 9$, su suma, su multiplicación, su resta y su división pertenecen al conjunto de los números naturales.

Solución.

La suma siempre produce un número natural, por tanto:

$$x + y = 7 + 9 = 16 \in \mathbb{N}.$$

Para la resta, como el minuendo es menor que el sustraendo, el resultado obtenido no es un número natural:

$$x - y = 7 - 9 = -2 \notin \mathbb{N}.$$

La multiplicación siempre produce un número natural, por tanto:

$$x \cdot y = 7 \cdot 9 = 63 \in \mathbb{N}.$$

Para la división, como en este caso el dividendo no es múltiplo del divisor, el resultado obtenido no es un número natural

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{9} \notin \mathbb{N}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.2. Comprueba la divisibilidad de los siguientes números: 69, 119, 187, 225, de acuerdo a las reglas de divisibilidad.

Solución.

Como ninguno de los números es par, se puede asegurar que niguno es divisible por 2. Y, por tanto, tampoco son divisibles ni por 4 ni por 6.

69 El 69 es divisible por 3 porque la suma de sus cifras es 15 y es múltiplo de 3.

119 El 119 es divisible por 7, pues al número de todas las cifras menos las unidades, 11, se le resta el doble de las unidades, que al ser 9, resulta 18, luego el resultado 18-11 es múltiplo de 7.

187 El 187 es divisible por 11, pues la suma de sus cifras impares es 1+7=8, y al restarle las cifras en posición par, que es el 8, entonces el resultado es 0.

225 El 225 es divisible por 3 porque la suma de sus cifras es 9 que es múltiplo de 3, es divisible por 5 porque termina en 5, y es divisible por 9 porque la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

——— ∞ ———

Problema 1.3. Comprueba si son primos los números: 151, 223, 311, 401.

Solución.

Para comprobar si un número a es primo basta con dividir el número entre los primeros números primos y parar si en un momento dado el cociente obtenido es menor que el divisor, pues entonces se puede asegurar que el número a es primo. Es sabido que los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

151 Se divide 151 entre 2, 3, 5, 7, 11 y 13.

$$\frac{151}{2} = 75,5; \ \frac{151}{3} = 50,3; \ \frac{151}{5} = 30,2;$$
$$\frac{151}{7} = 21,57; \ \frac{151}{11} = 13,72; \ \frac{151}{13} = 11,64.$$

En este momento el cociente resultante es menor a 13, luego se puede asegurar que el número 151 es primo.

223 Se divide 223 entre 2, 3, 5, 7, 11, 13 y 17. En este momento el cociente resultante es menor a 17, luego se puede asegurar que el número 223 es primo.

311 Se divide 311 entre 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. En este momento el cociente resultante es menor a 19, luego se puede asegurar que el número 311 es primo.

401 Se divide 449 entre 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23. En este momento el cociente resultante es menor a 23, luego se puede asegurar que el número 401 es primo.

——— ∞ ———

Problema 1.4. Comprueba si son primos los números: 137, 229, 313, 409 mediante el método de la raíz cuadrada, conocido como la división por tentativa.

Solución.

Para comprobar si un número a es primo mediante la división por tentativa hay que dividir el número entre los primeros números primos 2, 3, ... que sean menores que la raíz cuadrada de a, $\sqrt{a}$, y si no es divisible por ninguno de ellos, entonces se puede asegurar que el número a es primo.

137 Se halla $\sqrt{137} = 11,704$, entonces se divide 137 entre los primos menores, que son 2, 3, 5, 7 y 11. Y como ninguno es divisor se puede asegurar que el número 137 es primo.

229 Se halla $\sqrt{229} = 15,132$, entonces se divide 229 entre los primos menores, que son 2, 3, 5, 7, 11 y 13. Y como ninguno es divisor se puede asegurar que el número 229 es primo.

313 Se halla $\sqrt{313} = 17,691$, entonces se divide 313 entre los primos menores, que son 2, 3, 5, 7, 11, 13 y 17. Y como ninguno es divisor se puede asegurar que el número 313 es primo.

409 Se halla $\sqrt{409} = 20,223$, entonces se divide 449 entre los primos menores, que son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. Y como ninguno es divisor se puede asegurar que el número 409 es primo.

——— ∞ ———

Problema 1.5. Comprueba si dados los siguientes números enteros: $x = -5$ e $y = 4$, su suma, su multiplicación, su resta y su división pertenecen al conjunto de los números enteros.

Solución.

La suma siempre produce un número entero, por tanto:

$$x + y = -5 + 4 = -1 \in \mathbb{Z}.$$

La resta siempre produce un número entero, por tanto:

$$x - y = -5 - 4 = -9 \in \mathbb{Z}.$$

La multiplicación siempre produce un número entero, por tanto:

$$x \cdot y = -5 \cdot 4 = -20 \in \mathbb{Z}.$$

En el caso de la división solo se obtiene un número entero si el dividendo es múltiplo del divisor, lo cuál no ocurre en este caso, por tanto:

$$x/y = \frac{-5}{4} \notin \mathbb{Z}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.6. Dados los siguientes números racionales: $x = 2/3$, $y = 4/5$, comprueba si su suma, su multiplicación, su resta y su división pertenecen al conjunto de los números racionales.

Solución.

La suma siempre produce un número racional, por tanto:

$$x + y = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15} \in \mathbb{Q}.$$

La resta siempre produce un número racional, por tanto:

$$x - y = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10-12}{15} = \frac{-2}{15} \in \mathbb{Q}.$$

La multiplicación siempre produce un número racional, por tanto:

$$x \cdot y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15} \in \mathbb{Q}.$$

La división siempre produce un número racional, por tanto:

$$x : y = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} \in \mathbb{Q}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.7. Dados los números $x = \sqrt{3}$, $y = 5$, halla los números siguientes y decide si son racionales o irracionales:

a) $x + y$ **b)** $x \cdot y$ **c)** $x + x$ **d)** $x - x$ **e)** $x \cdot x$ **f)** x/x

Solución.

a) $z = x + y = \sqrt{3} + 5 \notin \mathbb{Q}$.

b) $z = x \cdot y = 5\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

c) $z = x + x = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

d) $z = x - x = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \in \mathbb{Q}$.

e) $z = x \cdot x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \in \mathbb{Q}$.

f) $z = x/x = \sqrt{3}/\sqrt{3} = 1 \in \mathbb{Q}$.

——— ∞ ———

Problema 1.8. Halla el valor de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{10}{2}$ b) $\binom{10}{0}$ c) $\binom{10}{10}$ d) $\binom{10}{1}$ e) $\binom{10}{9}$

Solución.

Se utiliza la definición de número combinatorio:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a) $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$

b) $\binom{10}{0} = \frac{10!}{0!(10-0)!} = \frac{10!}{0! \cdot 10!} = 1.$

c) $\binom{10}{10} = \frac{10!}{10!(10-10)!} = \frac{10!}{10! \cdot 0!} = 1.$

d) $\binom{10}{1} = \frac{10!}{1!(10-1)!} = \frac{10 \cdot 9!}{1! \cdot 9!} = 10.$

e) $\binom{10}{9} = \frac{10!}{9!(10-9)!} = \frac{10 \cdot 9!}{9! \cdot 1!} = 10.$

——— ∞ ———

Problema 1.9. Halla el valor de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{n}{2}$ b) $\binom{n}{0}$ c) $\binom{n}{n}$ d) $\binom{n}{1}$ e) $\binom{n}{n-1}$

Solución.

a) $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$

b) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1.$

c) $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1.$

d) $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{1! \cdot (n-1)!} = n.$

e) $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1!} = n.$

Nótese que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ y que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$

——— ∞ ———

Problema 1.10. Halla el valor del siguiente número combinatorio $\binom{5}{k}$, donde k varía entre 0 y 5.

Solución.

Una manera rápida de obtener el valor de los números combinatorios es el Triángulo de Pascal, que se muestra a continuación:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
n=2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
n=3 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
n=4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

Y donde los valores resultantes, en vez de calcularlos por la fórmula vista anteriormente se obtienen como suma de los elementos diagonales de la fila anterior, tal y como se muestra a continuación:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
n=1 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
n=2 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
n=3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
n=4 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
n=5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
n=6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
n=7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Por tanto, la solución a los valores pedidos se encuentra en la fila donde $n = 5$

$$\binom{5}{0} = 1; \ \binom{5}{1} = 5; \ \binom{5}{2} = 10; \ \binom{5}{3} = 10; \ \binom{5}{4} = 5; \ \binom{5}{5} = 1.$$

—— ∞ ——

Problema 1.11. Halla el valor de las siguientes expresiones:

a) $4^2 \cdot 4^3$ **b)** $5^4 \cdot 4^4$ **c)** $\left(9^2\right)^3$ **d)** $8^2 \cdot 8^{-3}$ **e)** $4^5 \cdot 2^{-10}$

Solución.

a) $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = \left(2^2\right)^5 = 2^{2 \cdot 5} = 2^{10}.$

b) $5^4 \cdot 4^4 = (5 \cdot 4)^4 = 20^4 = 2^4 5^4.$

c) $\left(9^2\right)^3 = 9^{2 \cdot 3} = 9^6 = 3^{12}.$

d) $8^2 \cdot 8^{-3} = 8^{2-3} = 8^{-1} = \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2^3} = 2^{-3}.$

e) $4^5 \cdot 2^{-10} = 2^{2 \cdot 5} \cdot 2^{-10} = 2^{10} \cdot 2^{-10} = 2^{10-10} = 2^0 = 1.$

—— ∞ ——

Problema 1.12. Halla el valor de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{4}$ **b)** $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3^3}$ **c)** $\sqrt[5]{10^{1/3}}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot 5^5$ **e)** $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{18^3}$ **f)** $\sqrt[3]{9^6}$

Solución.

a) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{4} = 4^{1/4} \cdot 4^{1/3} = 4^{1/4+1/3} = 4^{7/12} = \sqrt[12]{4^7} = \sqrt[12]{2^{2 \cdot 7}} =$

$$= \sqrt[12]{2^{14}} = \sqrt[12]{2^{12} \cdot 2^2} = 2^{12/12} \cdot \sqrt[12]{2^2} = 2 \cdot \sqrt[12]{2^2} = 2\sqrt[6]{2}.$$

b) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3^3} = 2^{3/2} \cdot 3^{3/2} = (2 \cdot 3)^{3/2} = 6^{3/2} = \sqrt{6^3} =$

$$= \sqrt{6^2 6^1} = 6^{2/2}\sqrt{6} = 6\sqrt{6}.$$

c) $\sqrt[5]{10^{1/3}} = \left(10^{1/3}\right)^{1/5} = 10^{1/15} = \sqrt[15]{10}.$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot 5^5 = 5^{1/4} \cdot 5^5 = 5^{(1/4)+5} = 5^{21/4} = \sqrt[4]{5^{21}}.$

e) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{18^3} = 2^{3/2} \cdot 18^{3/2} = (2 \cdot 18)^{3/2} = 36^{3/2} = \left(6^2\right)^{3/2} = 6^3 = 216.$

f) $\sqrt[3]{9^6} = \left(9^6\right)^{1/3} = 9^{6/3} = 9^2 = 3^4 = 81.$

——— ∞ ———

Problema 1.13. Halla el valor de las siguientes expresiones:

a) $-3 \cdot (4-2)^{-2} + 10 \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^{-1}$

b) $\dfrac{4}{5} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2} \cdot (2-5)$

c) $(1-4) \cdot 3^{-2} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} - 6 \cdot 2^{-3}$

d) $\left(\dfrac{8}{5}\right)^{-1} + (3-5) \cdot \left(\dfrac{7}{2}\right)^{2} + 2^{-3} \cdot 3$

Solución.

a) $-3 \cdot (4-2)^{-2} + 10 \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^{-1} = -3 \cdot (2)^{-2} + 10 \cdot \dfrac{4}{5} =$

$$= -3 \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{40}{5} = -\frac{3}{4} + 8 = -\frac{3}{4} + \frac{32}{4} = \frac{29}{4}.$$

b) $\dfrac{4}{5} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2} \cdot (2-5) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{1} + \dfrac{4}{9} \cdot (-3) = 4 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{12}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}.$

c) $(1-4) \cdot 3^{-2} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} - 6 \cdot 2^{-3} = (-3) \cdot \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{5}{2} - \dfrac{6}{8} = -\dfrac{3}{9} + \dfrac{5}{2} - \dfrac{6}{8} =$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{-4}{12} + \frac{30}{12} - \frac{9}{12} = \frac{17}{12}.$$

d) $$\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}+(3-5)\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{2}+2^{-3}\cdot 3=\frac{5}{8}+(-2)\cdot\frac{49}{4}+\frac{1}{2^3}\cdot 3=\frac{5}{8}-\frac{98}{4}+\frac{3}{2^3}=$$

$$=\frac{8}{8}-\frac{49}{2}=1-\frac{49}{2}=\frac{2}{2}-\frac{49}{2}=-\frac{47}{2}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.14. Halla el valor de las siguientes expresiones:

a) $\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^{3}:\left(\frac{9}{8}-\frac{5}{4}\right)^{2}$ **b)** $\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)^{2}-\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)^{2}:\left(\frac{2}{3}-1\right)^{2}$

c) $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^{-1}+4$ **d)** $\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{12}\right)-\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-4\right)^{-1}$

Solución.

a) $$\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^{3}:\left(\frac{9}{8}-\frac{5}{4}\right)^{2}=\left(\frac{6}{4}-\frac{7}{4}\right)^{3}:\left(\frac{9}{8}-\frac{10}{8}\right)^{2}$$

$$=\left(-\frac{1}{4}\right)^{3}:\left(-\frac{1}{8}\right)^{2}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}:\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=-1.$$

b) $$\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)^{2}-\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)^{2}:\left(\frac{2}{3}-1\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{6}\right)^{2}-\left(\frac{8}{6}-\frac{5}{6}\right)^{2}:\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{3}\right)^{2}=\left(-\frac{3}{6}\right)^{2}-\left(\frac{3}{6}\right)^{2}:\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}:\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{3}\right)^{2}$$

$$=\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=\frac{-8}{4}=-2.$$

c) $$\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^{-1}+4=\left(\frac{6}{4}-\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{9}-\frac{7}{9}\right)^{-1}+4$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4$$

$$= \frac{-4^2 \cdot 9}{3 \cdot 4} + 4 = -12 + 4 = -8.$$

d) $\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - 4\right)^{-1}$

$$= \left(\frac{3}{12} - \frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{10}{4}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{4}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{4}{12} + \left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{15}{4}\right)^{-1} = -\frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{4}{15}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.$$

——— ∞ ———

Problema 1.15. Halla el valor de las siguientes expresiones:

a) $(x+3)^2$ **b)** $(-1-x)^2$ **c)** $(x-4)(x+4)$

d) $(\sqrt{7}-x)^2$ **e)** $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Solución.

a) $(x+3)^2$

Hay que hallar el cuadrado de una suma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = x^2 + 6x + 9.$$

b) $(-1-x)^2$

Hay que hallar el cuadrado de la diferencia:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(-1-x)^2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot x + x^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Equivalentemente se puede escribir:

$$[(-1)(1+x)]^2 = (-1)^2 (1+x)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + x^2 = 1 + 2x + x^2.$$

c) $(x-4)(x+4)$

Hay que hallar el producto de una suma por la diferencia:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

$$(x-4)(x+4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16.$$

d) $(\sqrt{7}-x)^2$

$$(\sqrt{7}-x)^2 = (\sqrt{7})^2 - 2\cdot(\sqrt{7})\cdot x + x^2 = 7 - 2\sqrt{7}x + x^2.$$

e) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = x^2 - 3.$$

——— ∞ ———

Problema 1.16. Desarrolla mediante el binomio de Newton: $(x+y)^5$.

Solución.

El binomio de Newton permite escribir:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2$$

$$+ \ldots + \binom{n}{n-1} xy^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.$$

En este caso $n = 5$, y aplicando la expresión del binomio de Newton:

$$(x+y)^5$$

$$= \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4y + \binom{5}{2} x^3y^2 + \binom{5}{3} x^2y^3 + \binom{5}{4} xy^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

——— ∞ ———

Problema 1.17. Desarrolla mediante el binomio de Newton: $(2+y)^7$.

Solución.

En este caso $n=7$, y aplicando la expresión del binomio de Newton:

$$(2+y)^7$$
$$= \binom{7}{0} 2^7 + \binom{7}{1} 2^6 y + \binom{7}{2} 2^5 y^2 + \binom{7}{3} 2^4 y^3$$
$$+ \binom{7}{4} 2^3 y^4 + \binom{7}{5} 2^2 y^5 + \binom{7}{6} 2y^6 + \binom{7}{7} y^7$$
$$= 1\cdot 2^7 + 7\cdot 2^6 y + 21\cdot 2^5 y^2 + 35\cdot 2^4 y^3 + 35\cdot 2^3 y^4 + 21\cdot 2^2 y^5 + 7\cdot 2y^6 + 1\cdot y^7$$
$$= 128 + 448y + 672y^2 + 560y^3 + 280y^4 + 84y^5 + 14y^6 + y^7.$$

——— ∞ ———

Problema 1.18. Desarrolla mediante el binomio de Newton $(x-\sqrt{x})^{10}$.

Solución.

En este caso $n=10$, y en lugar de x e y, se tienen x y $-\sqrt{x}$, luego:

$$(x-\sqrt{x})^{10}$$
$$= \binom{10}{0} x^{10} + \binom{10}{1} x^9 \left(-\sqrt{x}\right) + \binom{10}{2} x^8 \left(-\sqrt{x}\right)^2$$
$$+ \binom{10}{3} x^7 \left(-\sqrt{x}\right)^3 + \binom{10}{4} x^6 \left(-\sqrt{x}\right)^4 + \binom{10}{5} x^5 \left(-\sqrt{x}\right)^5$$
$$+ \binom{10}{6} x^4 \left(-\sqrt{x}\right)^6 + \binom{10}{7} x^3 \left(-\sqrt{x}\right)^7 + \binom{10}{8} x^2 \left(-\sqrt{x}\right)^8$$
$$+ \binom{10}{9} x \left(-\sqrt{x}\right)^9 + \binom{10}{10} \left(-\sqrt{x}\right)^{10}.$$

Por tanto, sustituyendo los números combinatorios por su valor:

$$(x-\sqrt{x})^{10}$$
$$= x^{10} + 10x^9 \left(-\sqrt{x}\right) + 45x^8 \left(-\sqrt{x}\right)^2 + 120x^7 \left(-\sqrt{x}\right)^3$$
$$+210x^6 \left(-\sqrt{x}\right)^4 + 252x^5 \left(-\sqrt{x}\right)^5 + 210x^4 \left(-\sqrt{x}\right)^6$$

$$+120x^3\left(-\sqrt{x}\right)^7+45x^2\left(-\sqrt{x}\right)^8+10x\left(-\sqrt{x}\right)^9+\left(-\sqrt{x}\right)^{10}.$$

Y escribiendo la raíz como una potencia $\sqrt{x}=x^{1/2}$ y sumando los exponentes se tiene finalmente:

$$\left(x-\sqrt{x}\right)^{10}$$

$$=x^{10}-10x^9x^{1/2}+45x^8x^1-120x^7x^{3/2}+210x^6x^2-252x^5x^{5/2}$$

$$+210x^4x^3-120x^3x^{7/2}+45x^2x^4-10xx^{9/2}+x^5$$

$$=x^{10}-10x^{19/2}+45x^9-120x^{17/2}+210x^8-252x^{15/2}$$

$$+210x^7-120x^{13/2}+45x^6-10x^{11/2}+x^5.$$

——— ∞ ———

Problema 1.19. Desarrolla $(x+y+z)^3$ mediante el binomio de Newton.

Solución.

En este caso $n=3$ y, en lugar de x e y, se tienen x e $(y+z)$, luego

$$(x+y+z)^3=(x+(y+z))^3.$$

y entonces:

$$(x+(y+z))^3$$

$$=\binom{3}{0}x^3+\binom{3}{1}x^2(y+z)+\binom{3}{2}x(y+z)^2+\binom{3}{3}(y+z)^3$$

$$=x^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+(y+z)^3.$$

Por otra parte:

$$(y+z)^2=y^2+2yz+z^2,$$

$$(y+z)^3=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3.$$

Sustituyendo:

$$(x+(y+z))^3=$$

$$=x^3+3x^2(y+z)+3x(y^2+2yz+z^2)+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$$

$$=x^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2$$

$$+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$$

$$=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+3y^2z+3xz^2+3yz^2+6xyz.$$

——— ∞ ———

Problema 1.20. Halla el cuarto término del desarrollo $\left(4x^2 - 5xy\right)^7$.

Solución.

El término que ocupa el lugar $r+1$ del desarrollo de $(x+y)^n$ es:

$$\binom{n}{r} x^{(n-r)} y^r.$$

Los términos del binomio dado son de la forma:

$$\binom{7}{r} \left(4x^2\right)^{7-r} (-5xy)^r$$

Se pide encontrar el cuarto término, luego $4 = (r+1)$, es decir $r = 3$, y por tanto:

$$\binom{7}{3} (4x^2)^{(7-3)} (-5xy)^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} (4x^2)^4 (-5xy)^3 =$$

$$= -35 \cdot 4^4 \cdot 5^3 x^{11} y^3 = -7 \cdot 4^4 \cdot 5^4 \cdot x^{11} \cdot y^3 = -1120000 x^{11} y^3.$$

——— ∞ ———

Problema 1.21. Halla el término que contenga a x^{16} en el desarrollo de $\left(x^2 + xy\right)^{10}$.

Solución.

El término pedido será de la forma:

$$\binom{10}{r} \left(x^2\right)^{(10-r)} (xy)^r = \binom{10}{r} x^{20-2r} x^r y^r = \binom{10}{r} x^{20-r} y^r.$$

Como se busca el término que contiene a x^{16}, se ha de cumplir que:

$$20 - r = 16 \Rightarrow r = 4,$$

luego el término buscado es el quinto, $(r+1) = 4+1 = 5$, y su valor es:

$$\binom{10}{4} \left(x^2\right)^6 (xy)^4 = \binom{10}{4} x^{16} y^4 = 210 x^{16} y^4.$$

——— ∞ ———

Problema 1.22. Expresa los siguientes polinomios en forma de productos con igualdades notables:

a) $P(x) = 49 - 7x + \dfrac{x^2}{4}$ b) $Q(t) = 36z^2t^2 + 24z^2t + 4z^2$

Solución.

a) $P(x) = 49 - 7x + \dfrac{x^2}{4}$

Por tener que ser una igualdad notable y como tiene dos términos positivos y uno negativo, se trata del cuadrado de una diferencia,

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

e igualando término a término, se tiene:

$$\begin{array}{rcl} a^2 = 49 & \Longrightarrow & a = \pm 7; \\ b^2 = \frac{x^2}{4} & \Longrightarrow & b = \pm \dfrac{x}{2}; \\ -2ab = -7x & \Longrightarrow & \begin{cases} a = 7, & b = \dfrac{x}{2} \\ a = -7, & b = -\dfrac{x}{2}. \end{cases} \end{array}$$

Luego se tienen dos soluciones:

$$P_1(x) = (7 - \frac{x}{2})^2, P_2(x) = (-7 + \frac{x}{2})^2,$$

b) $Q(t) = 36z^2t^2 + 24z^2t + 4z^2$

En primer lugar, se puede comprobar que todos los términos son múltiplos de $4z^2$, luego sacando factor común se tiene que:

$$Q(t) = 4z^2(9t^2 + 6t + 1).$$

Como el polinomio ha de tener la forma de un producto con una igualdad notable, entonces

$$(9t^2 + 6t + 1)$$

ha de ser una igualdad notable y, como tiene todos los términos positivos, se está ante el cuadrado de una suma,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

e igualando término a término, se tiene:

$$\begin{aligned} a^2 = 9t^2 &\Longrightarrow a = \pm 3t; \\ b^2 = 1 &\Longrightarrow b = \pm 1; \\ 2ab = 6t &\Longrightarrow \begin{cases} a = 3t, & b = 1 \\ a = -3t, & b = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego se tienen dos soluciones para la igualdad notable y por tanto dos soluciones para el polinomio buscado:

$$Q_1(t) = 4z^2(3t+1)^2, \;\; Q_2(t) = 4z^2(-3t-1)^2.$$

——— ∞ ———

Problema 1.23. Realiza las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)$ **b)** $3\,(x-1) - 4\left(7x^2 - 9x\right) + 7\,(-4x+2)$

Solución.

a) $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)$

Se desarrolla el primer término que es el cuadrado de la diferencia y se tiene:

$$\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4.$$

Y ahora se multiplica y se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right) &= \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4\right)\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}x^2\right)\left(\frac{4}{3}x\right) + \left(\frac{1}{4}x^2\right)\left(-\frac{1}{5}\right) + (-2x)\left(\frac{4}{3}x\right) \\ &\quad + (-2x)\left(-\frac{1}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{3}x\right) + 4\left(-\frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{20} - \frac{8x^2}{3} + \frac{2x}{5} + \frac{16x}{3} - \frac{4}{5} \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{163x^2}{60} + \frac{86x}{15} - \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

b) $3\,(x-1)-4\left(7x^2-9x\right)+7\,(-4x+2)$

Se van desarrollando cada uno de los términos y luego se suman:

$$3\,(x-1)-4\left(7x^2-9x\right)+7\,(-4x+2)$$

$$= 3x-3-28x^2+36x-28x+14=-28x^2+11x+11.$$

——— ∞ ———

Problema 1.24. Dados los polinomios:

$$P(x)=5x^4+4x^3-3x^2+2x-1,$$

$$Q(x)=3x^3+3x^2+3x,$$

halla las siguientes operaciones y decide el grado del polinomio resultante:

a) $P+Q$ **b)** $P-Q$ **c)** $P\cdot Q$

Solución.

a) $P+Q$

$$(P+Q)\,(x)=\left(5x^4+4x^3-3x^2+2x-1\right)+\left(3x^3+3x^2+3x\right)$$

$$=(5+0)x^4+(4+3)x^3+(-3+3)x^2+(2+3)x+(-1+0)$$

$$=5x^4+7x^3+5x-1.$$

El grado del polinomio suma, $P+Q$, es el grado del polinomio mayor, que en este caso es el de P, luego el grado es 4.

b) $P-Q$

$$(P-Q)\,(x)=\left(5x^4+4x^3-3x^2+2x-1\right)-\left(3x^3+3x^2+3x\right)$$

$$=(5-0)x^4+(4-3)x^3+(-3-3)x^2+(2-3)x+(-1-0)$$

$$=5x^4+x^3-6x^2-x-1.$$

El grado del polinomio diferencia, $P-Q$, es el grado del polinomio mayor, en este caso P, luego el grado es 4.

c) $P \cdot Q$

$$\begin{aligned}(P\cdot Q)(x) &= \left(5x^4+4x^3-3x^2+2x-1\right)\cdot\left(3x^3+3x^2+3x\right)\\ &= \left(5x^4+4x^3-3x^2+2x-1\right)\cdot 3x^3\\ &\quad+\left(5x^4+4x^3-3x^2+2x-1\right)\cdot 3x^2\\ &\quad+\left(5x^4+4x^3-3x^2+2x-1\right)\cdot 3x\\ &= \left(15x^7+12x^6-9x^5+6x^4-3x^3\right)\\ &\quad+\left(15x^6+12x^5-9x^4+6x^3-3x^2\right)\\ &\quad+\left(15x^5+12x^4-9x^3+6x^2-3x\right)\\ &= 15x^7+(12+15)x^6+(-9+12+15)x^5+(6-9+12)x^4\\ &\quad+(-3+6-9)x^3+(-3+6)x^2-3x\\ &= 15x^7+27x^6+18x^5+9x^4-6x^3+3x^2-3x.\end{aligned}$$

El grado del polinomio $P\cdot Q$ es el resultante de la suma de los grados de cada polinomio, en este caso, 7.

—— ∞ ——

Problema 1.25. Sean $P(x) = x^2+9x+22$ y $S(x) = x+5$. Halla la división de P por S.

Solución.

Para que sea posible realizar la división de dos polinomios P y S, se ha de cumplir que $grad(P) \geq grad(S)$, y en este caso se cumple pues

$$grad(P) = 2 \geq grad(S) = 1.$$

Se han de obtener dos nuevos polinomios Q y R, de forma que Q es el **cociente** de la división de P por S, y R es el **resto** de dicha división.

$$\begin{array}{l|l} P & \mathrm{S} \\ \cline{2-2} R & Q \end{array}$$

En este caso queda:

$$\begin{array}{rl}
x^2+9x+22 & \underline{|\ x+5\ } \\
-(x^2+5x) & \ x+4 \\
\hline
0x^2+4x+22 & \\
-(4x+20) & \\
\hline
+2 &
\end{array}$$

Por tanto, el resultado es el polinomio cociente $Q(x) = x+4$ y el polinomio resto $R(x) = 2$.

Esto, entonces, se puede escribir como:

$$\frac{x^2+9x+22}{x+5} = (x+4) + \frac{2}{x+5}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.26. Halla la división de los polinomios $P(x) = 3x^5 - 25x^4 + 11x - 17$ y $S(x) = x^3 - x^2 + 1$.

Solución.

Como se cumple que $grad(P) = 5 \geq grad(S) = 3$, se puede llevar a cabo la división:

$$\begin{array}{rl}
3x^5 - 25x^4 + \qquad +11x - 17 & \underline{|\ x^3 - x^2 + 1\ } \\
-(3x^5 - 3x^4 + 3x^2) & \ 3x^2 - 22x - 22 \\
\hline
0x^5 - 22x^4 \quad - 3x^2 & \\
-(-22x^4 + 22x^3 \quad - 22x) & \\
\hline
0 - 22x^3 - 3x^2 + 33x & \\
-\left(-22x^3 + 22x^2 \quad - 22\right) & \\
\hline
-25x^2 + 33x + 5 &
\end{array}$$

Por tanto, el resultado es el polinomio cociente $Q(x) = 3x^2 - 22x - 22$ y el polinomio resto $R(x) = -25x^2 + 33x + 5$.

Esto, entonces, se puede escribir como:

$$\frac{P(x)}{S(x)} = \frac{3x^5 - 25x^4 + 11x - 17}{x^3 - x^2 + 1} = 3x^2 - 22x - 22 + \frac{-25x^2 + 33x + 5}{x^3 - x^2 + 1}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.27. Sean $P(x) = x^2 + 9x + 22$ y $S(x) = x + 5$. Halla el resto de la división de P por S mediante el teorema del resto.

Solución.

El teorema del resto indica que dado un polinomio $P(x)$ y dado un binomio $(x-a)$, entonces el resto de dividir el polinomio entre el binomio es igual al valor numérico del polinomio para $x = a$, es decir, el resto es igual a $P(a)$.

Por tanto, evaluando el polinomio en $a = -5$ se tiene:

$$P(-5) = (-5)^2 + 9(-5) + 22 = 2,$$

que como se puede comprobar coincide con el resultado del Problema 1.25.

—— ∞ ——

Problema 1.28. Sean $P(x) = x^2 + 9x + 20$ y $S(x) = x + 4$. Halla el resto de la división de P y S mediante el teorema del resto.

Solución.

Se evalua el polinomio en el valor $a = -4$ y se tiene:

$$P(-4) = (-4)^2 + 9(-4) + 20 = 0.$$

Y como se ha obtenido que el resto es 0, implica que el polinomio $S(x)$ divide al polinomio $P(x)$. Efectivamente realizando la división se tiene que esta es exacta.

$$\begin{array}{c|l} x^2 + 9x + 20 & x + 4 \\ \cline{2-2} -(x^2 + 4x) & x + 5 \\ \cline{1-1} 0x^2 + 5x + 20 & \\ -(5x + 20) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

—— ∞ ——

Problema 1.29. Sean $P(x) = x^2 + 4x - 21$ y $S(x) = x + 7$. Comprueba que P es divisible por S mediante el teorema del factor.

Solución.

El teorema del factor indica que dado un polinomio $P(x)$ y dado un binomio $(x-a)$, entonces el polinomio es divisible por el binomio si, y solo si, el valor numérico del polinomio para $x = a$ es 0, es decir, $P(a) = 0$.

Como en este caso $a = -7$, se tiene:

$$P(a) = P(-7) = (-7)^2 + 4(-7) - 21 = 0,$$

entonces por el teorema se puede afirmar que P es divisible por S.

Se puede comprobar haciendo la división:

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 4x - 21 & x + 7 \\ \cline{2-2}
-(x^2 + 7x) & x - 3 \\ \cline{1-1}
0x^2 - 3x - 21 & \\
-(-3x - 21) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

———— ∞ ————

Problema 1.30. Halla el valor de m para que $(x + 3)$ sea un factor del polinomio $P(x) = x^3 - 2x + 3m$.

Solución.

Como se dice que $(x+3)$ es un factor del polinomio, entonces por el teorema del factor se sabe que

$$P(-3) = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} P(-3) &= (-3)^3 - 2(-3) + 3m \\ &= -27 + 6 + 3m = -21 + 3m = 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$m = 7.$$

———— ∞ ————

Problema 1.31. Sean $P(x) = x^2+9x+22$ y $S(x) = x+5$. Halla la división mediante el método de Ruffini.

Solución.

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 9 & 22 \\
-5 & 0 & -5 & -20 \\ \hline
 & 1 & 4 & 2
\end{array}$$

De donde se obtiene $Q(x) = x + 4$ y $R(x) = 2$.

———— ∞ ————

Problema 1.32. Sean $P(x) = x^4 - 4x^2 + 2x - 12$ y $S(x) = x - 2$. Halla la división mediante el método de Ruffini.

Solución.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -4 & 2 & -12 \\
2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 4 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & 2 & -8
\end{array}
$$

De donde se obtiene $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ y $R(x) = -8$.

Y, por tanto, en este caso se tiene:

$$\frac{x^4 - 4x^2 + 2x - 12}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 2 - \frac{8}{x - 2}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.33. Dado el polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, halla su factorización.

Solución.

Por el teorema fundamental del álgebra y dado que el grado del polinomio es 3, número impar, se deduce que al menos hay una raíz real.

Entonces se acude al teorema del factor para intentar hallar alguno de los monomios divisores del polinomio, y que, por tanto, dan lugar a las raíces.

Se prueba con el monomio $(x - 1)$, se evalúa $P(1)$ y si vale 0, entonces el número $x = 1$ es una raíz, el monomio es un divisor y se puede aplicar el método de Ruffini.

Al evaluar el polinomio para $x = 1$ se tiene:

$$P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 0$$

y, por tanto, el polinomio es divisible entre $(x - 1)$, luego ahora se puede aplicar el método de Ruffini:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & -4 & 4 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & 0
\end{array}
$$

De donde se obtiene el nuevo polinomio $Q(x) = x^2 - 4$.

Aquí, y dado que es un polinomio de 2º grado, se puede utilizar la fórmula para obtener las raíces de una ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

o bien se vuelve a realizar el proceso del teorema del factor. Aunque en este caso se puede observar que el polinomio Q es el resultante del producto de una suma por diferencia:

$$Q(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2).$$

Luego en este caso se finaliza la factorización, siendo, por tanto, el resultado:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x+2)(x-2).$$

——— ∞ ———

Problema 1.34. Halla la factorización del polinomio $P(x) = x^4 + 4x^2 - 45$.

Solución.

En este caso, y como se trata de un polinomio de grado 4, se intenta hacer un cambio de variable para transformar el polinomio en uno de grado 2 que se sabe resolver.

Efectivamente haciendo $t = x^2$, se tiene:

$$P(t) = t^2 + 4t - 45.$$

Ahora, y como es un polinomio de segundo grado, se puede utilizar la fórmula para obtener las raíces de una ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-4 \pm 14}{2} = \begin{cases} t = 5 \\ t = -9 \end{cases}$$

Luego el polinomio factorizado es:

$$P(t) = (t+9)(t-5).$$

Y deshaciendo el cambio, $t = x^2$, se tiene que el polinomio puede escribirse:

$$P(x) = x^4 + 4x^2 - 45$$
$$= (x^2+9)\left(x^2-5\right) = (x^2+9)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right).$$

——— ∞ ———

Problema 1.35. Halla las raíces del polinomio $P(x) = 6x^3 - x^2 - 11x + 6$ aplicando el teorema de la raíz racional y el teorema del factor.

Solución.

Por el teorema de la raíz racional las raíces racionales serán del tipo $x = \frac{p}{q}$, donde:

- p es divisor de $a_0 = 6$, y por tanto p puede ser $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.
- q es divisor de $a_2 = 6$, y por tanto q puede ser $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.
- $\frac{p}{q}$, con p y q coprimos, son $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}, \pm2, \pm\frac{2}{3}, \pm3 \pm \frac{3}{2}$ *y* ± 6.

Por el teorema fundamental del álgebra, como el polinomio es de grado 3, tendrá 3 raíces. Por el teorema del factor, se sustituye el valor en el polinomio y si su resultado es 0, entonces es raíz:

- $x = 1$ es raíz, pues
$$P(1) = 6 \cdot 1^3 - 1^2 - 11 \cdot 1 + 6 = 6 - 1 - 11 + 6 = 0.$$
- $x = -1$ no es raíz.
$$P(-1) = 6 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 11 \cdot (-1) + 6 = -6 - 1 + 11 + 6 = 10.$$
- $x = 2$ no es raíz.
$$P(2) = 6 \cdot 2^3 - 2^2 - 11 \cdot 2 + 6 = 48 - 4 - 22 + 6 = 28 \neq 0.$$
- $x = -2$ no es raíz.
$$P(-2) = 6\cdot(-2)^3 - (-2)^2 - 11\cdot(-2) + 6 = -48 - 4 + 22 + 6 = -24 \neq 0.$$

- $x = 3$ no es raíz.

$$P(3) = 6 \cdot 3^3 - 3^2 - 11 \cdot 3 + 6 = 162 - 9 - 33 + 6 = 126 \neq 0.$$

- $x = -3$ no es raíz.

$$P(-3) = 6 \cdot (-3)^3 - (-3)^2 - 11 \cdot (-3) + 6 = -162 - 9 + 33 + 6 = -132 \neq 0.$$

- $x = \frac{1}{2}$ no es raíz.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 11 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{6}{8} - \frac{1}{4} - \frac{11}{2} + 6 = \frac{8}{8} = 1 \neq 0.$$

- $x = \frac{-1}{2}$ no es raíz.

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{2}\right) &= 6\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 11\left(-\frac{1}{2}\right) + 6 \\ &= -\frac{6}{8} - \frac{1}{4} + \frac{11}{2} + 6 = \frac{21}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

- $x = \frac{-2}{3}$ no es raíz.

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{2}{3}\right) &= 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 11 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 6 \\ &= -6\frac{8}{27} - \frac{4}{9} + 11\frac{2}{3} + 6 = \frac{300}{27} = \frac{100}{9} \neq 0. \end{aligned}$$

- $x = \frac{2}{3}$ es raíz

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 11 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 6 = 6\frac{8}{27} - \frac{4}{9} - 11\frac{2}{3} + 6 = 0.$$

- $x = \frac{-3}{2}$ es raíz

$$P\left(-\frac{3}{2}\right) = 6\left(-\frac{3}{2}\right)^3 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 11\left(-\frac{3}{2}\right) + 6 = -6\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{33}{2} + 6 = 0.$$

Como ya se han hallado 3 raíces, no es necesario seguir comprobando, y por tanto las raíces del polinomio P son $x = 1, x = \frac{2}{3}$ y $x = \frac{-3}{2}$. Así, el polinomio puede escribirse de la siguiente forma:

$$P(x) = 6x^3 - x^2 - 11x + 6 = (x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

En este ejercicio se han ido sustituyendo las posibles raíces hasta comprobar que tres de ellas verifican $P(x) = 0$. En la práctica es más eficiente, una vez encontrada la primera raíz, resolver la ecuación de segundo grado.

——— ∞ ———

Problema 1.36. Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$, halla las raíces racionales del polinomio y escribe el polinomio en función de sus factores.

Solución.

Por el teorema de la raíz racional las raíces racionales serán del tipo $x = \frac{p}{q}$, donde:

- p es divisor de $a_0 = 4$, y por tanto p puede ser $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
    - q es divisor de $a_4 = 1$, y por tanto q puede ser ± 1.
    - $\frac{p}{q}$, con p y q coprimos, son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Como el polinomio es de grado 3, tendrá 3 raíces. Sustituyendo:

- $x = 1$, $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = -3 \neq 0$, no es raíz.
- $x = -1$, $P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 4 = -9 \neq 0$, no es raíz.
- $x = 2$, $P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 4 = 0$, este valor SÍ es una raíz.
- $x = -2$, $P(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 4 = -24 \neq 0$, no es raíz.
- $x = 4$, $P(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 4 = 36 \neq 0$, no es raíz.
- $x = -4$, $P(-4) = (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 4 = -108 \neq 0$, no es una raíz.

Por tanto, la única raíz racional del polinomio P es $x = 2$.

Si se divide el polinomio P por el monomio $(x-2)$ se obtiene el factor que falta, que ha de ser de grado 2.

Se procede a hacer la división por el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Y se obtiene como segundo factor (x^2+2) que es de tipo cuadrático y no tiene raíces reales, sus raíces son complejas. Esto cumple el teorema de la raíz racional que decía que no había más raíces racionales.

Finalmente el polinomio puede escribirse como producto de factores lineales y cuadráticos:

$$P(x) = (x-2)(x^2+2).$$

——— ∞ ———

Problema 1.37. Halla la descomposición en fracciones simples del siguiente cociente de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-9}{x^2-4}.$$

Solución.

Como el grado$(P) = 1 <$ grado$(Q) = 2$, se puede realizar la descomposición en suma de fracciones simples.

En primer lugar, se halla la descomposición en factores lineales y cuadráticos del polinomio del denominador, Q, y se puede observar que es la diferencia de cuadrados, luego es una suma por diferencia:

$$Q(x) = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2),$$

y por tanto:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-9}{(x+2)(x-2)}.$$

Como hay factores lineales distintos, entonces la descomposición es del tipo:

$$\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_r}{x-a_r},$$

y con los valores dados por el problema se tiene:

$$\frac{x-9}{(x+2)(x-2)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{A_1(x-2)+A_2(x+2)}{x^2-4}$$
$$= \frac{(A_1+A_2)x - 2(A_1-A_2)}{x^2-4}.$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$x-9 = (A_1+A_2)x - 2(A_1-A_2),$$

de donde igualando los coeficientes de los términos de igual grado se obtiene un sistema de dos ecuaciones, y resolviendo:

$$\left\{\begin{array}{c} A_1+A_2=1 \\ -2(A_1-A_2)=-9 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A_1+A_2=1 \\ A_1-A_2=\dfrac{9}{2} \end{array}\right. \Rightarrow 2A_1 = \frac{11}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{11}{4},$$

$$A_1+A_2 = \frac{11}{4} + A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = -\frac{7}{4},$$

luego, una vez obtenidos los coeficientes buscados A_1 y A_2, se tiene:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x-9}{x^2-4} = \frac{11}{4(x+2)} + \frac{-7}{4(x-2)}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.38. Descompón en fracciones simples el siguiente cociente de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x+3}{x^2-9}.$$

Solución.

Como el grado del numerador es menor que el del denominador, se procede a factorizar el denominador:

$$Q(x) = x^2-9 = (x-3)(x+3),$$

y como los factores son lineales y distintos entre sí, se puede escribir:

$$\frac{3x+3}{x^2-9} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+3},$$

y operando se tiene:

$$\frac{3x+3}{x^2-9} = \frac{A_1(x+3)+A_2(x-3)}{x^2-9} = \frac{(A_1+A_2)x + 3A_1 - 3A_2}{x^2-9}.$$

A continuación, se igualan los numeradores:

$$3x+3=(A_1+A_2)\,x+3A_1-3A_2,$$

identificando coeficientes se forma un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A_1+A_2=3\\ 3A_1-3A_2=3\end{cases}$$

y resolviendo se obtienen los valores $A_1=2$ y $A_2=1$. Por tanto, se puede escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{3x+3}{x^2-9}=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+3}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.39. Descompón en fracciones simples el siguiente cociente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5x-4}{x^2-x-2}.$$

Solución.

Como el grado del numerador es menor que el del denominador, se procede a factorizar el denominador y se obtiene:

$$Q(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1),$$

y como los factores son lineales y distintos entre sí, se puede escribir:

$$\frac{5x-4}{x^2-x-2}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+1},$$

y operando se tiene:

$$\frac{5x-4}{x^2-x-2}=\frac{A_1(x+1)+A_2(x-2)}{x^2-x-2}=\frac{(A_1+A_2)\,x+A_1-2A_2}{x^2-x-2}.$$

A continuación, se igualan los numeradores:

$$5x-4=(A_1+A_2)\,x+A_1-2A_2,$$

identificando coeficientes se forma un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A_1+A_2=5\\ A_1-2A_2=-4\end{cases}$$

y resolviendo se obtienen los valores $A_1=2$ y $A_2=3$.

Luego se puede escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5x-4}{x^2-x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+1}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.40. Descompón en fracciones simples el cociente de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{6x^2-17x+1}{x^3-4x^2+x+6}.$$

Solución.

Como el grado del numerador es menor que el del denominador, se procede a factorizar el denominador, y aplicando Ruffini se puede llegar a:

$$Q(x)=x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x-2)(x-3),$$

y como los factores son lineales y distintos entre sí, se puede escribir:

$$\frac{6x^2-17x+1}{x^3-4x^2+x+6}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-3},$$

y operando se tiene:

$$\begin{aligned}&\frac{6x^2-17x+1}{x^3-4x^2+x+6}\\ &=\frac{A_1(x-2)(x-3)+A_2(x+1)(x-3)+A_3(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x-3)}\\ &=\frac{(A_1+A_2+A_3)\,x^2+(-5A_1-2A_2-A_3)\,x+(6A_1-3A_2-2A_3)}{(x+1)(x-2)(x-3)}.\end{aligned}$$

A continuación, se igualan los numeradores:

$$6x^2-17x+1=(A_1+A_2+A_3)\,x^2+(-5A_1-2A_2-A_3)\,x+$$

$$+\,(6A_1-3A_2-2A_3)\,,$$

identificando coeficientes se forma un sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c}A_1+A_2+A_3=6\\ -5A_1-2A_2-A_3=-17\\ 6A_1-3A_2-2A_3=1\end{array}\right.$$

y resolviendo se obtienen los valores $A_1=2$, $A_2=3$, y $A_3=1$, luego se puede escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{6x^2-17x+1}{x^3-4x^2+x+6}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x-3}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.41. Descompón en fracciones simples el cociente de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}.$$

Solución.

Como el grado del numerador es menor que el del denominador, se procede a factorizar el denominador, y aplicando Ruffini se puede llegar a:

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2).$$

Como los factores son lineales y distintos entre sí, se puede escribir:

$$\frac{x^2 - x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-2},$$

y operando se tiene:

$$\frac{x^2 - x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} =$$

$$= \frac{A_1(x+1)(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)},$$

e igualando numeradores:

$$x^2 - x - 1 = A_1(x+1)(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-1)(x+1).$$

Llegados a este punto, se podría generar un sistema de ecuaciones, de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, de forma análoga a como se ha especificado en el ejemplo anterior. Sin embargo, hay una forma más rápida de obtener la solución que consiste en dar determinados valores a la x, para que se anulen los monomios y a partir de ahí obtener la solución de las distintas incógnitas.

- Si $x = 1$, se anulan los multiplicandos $(x-1)$ y se obtiene:

$$1^2 - 1 - 1 = A_1(1+1)(1-2) + A_2\cancel{(1-1)}(1-2) + A_3\cancel{(1-1)}(1+1),$$

$$-1 = -2A_1 \Rightarrow A_1 = 1/2.$$

- Si $x = -1$, se anulan los multiplicandos $(x+1)$ y se obtiene:

$$(-1)^2 - (-1) - 1 = A_1\cancel{((-1)+1)}((-1)-2)+$$

$$+A_2((-1)-1)((-1)-2) + A_3((-1)-1)\cancel{((-1)+1)},$$

$$1 = 6A_2 \Rightarrow A_2 = 1/6.$$

- Si $x = 2$, se anulan los multiplicandos $(x-2)$ y se obtiene:

$$2^2 - 2 - 1 = A_1(2+1)\cancel{(2-2)} + A_2(2-1)\cancel{(2-2)} + A_3(2-1)(2+1),$$
$$1 = 3A_3 \Rightarrow A_3 = 1/3.$$

Luego la descomposición en fracciones simples del cociente es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/6}{x+1} + \frac{1/3}{x-2}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.42. Descompón en fracciones simples el cociente de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x^2 - 2x + 1}.$$

Solución.

Como el grado del numerador es menor que el del denominador, se procede a factorizar el denominador, y se observa que es una igualdad notable, en particular el cuadrado de la diferencia, luego:

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2,$$

como los factores son lineales y ahora están repetidos, siendo la multiplicidad $m = 2$, se puede escribir:

$$\frac{x+1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2},$$

y operando se tiene:

$$\frac{x+1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{A_1(x-1) + A_2}{(x-1)^2} = \frac{A_1 x - A_1 + A_2}{(x-1)^2},$$

por tanto, igualando numeradores:

$$x + 1 = A_1 x - A_1 + A_2,$$

e identificando coeficientes se obtiene que $A_1 = 1$, y entonces $A_2 = 2$.

Luego se tiene que la descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.43. Descompón en fracciones simples el cociente de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x^3+x^2-5x+3}.$$

Solución.

Como el grado del numerador es menor que el del denominador, se procede a factorizar el denominador, y por Ruffini se obtiene que:

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x+3)(x-1)^2,$$

como los factores son lineales y uno está repetido con multiplicidad $m = 2$, se puede escribir:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{A_3}{(x-1)^2},$$

y operando se tiene:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x+3)(x-1) + A_3(x+3)}{(x+3)(x-1)^2},$$

donde igualando numeradores:

$$x+1 = A_1(x-1)^2 + A_2(x+3)(x-1) + A_3(x+3),$$

y dando valores a la x, para que se anulen los monomios se obtiene la solución de las distintas incógnitas.

- Si $x = 1$, se anulan los multiplicandos $(x-1)$ y se obtiene:

$$1+1 = A_1\cancel{(1-1)^2} + A_2(1+3)\cancel{(1-1)} + A_3(1+3)$$

$$2 = 4A_3 \Rightarrow A_3 = 1/2.$$

- Si $x = -3$, se anulan los multiplicandos $(x+3)$ y se obtiene:

$$-3+1 = A_1(-3-1)^2 + A_2\cancel{(-3+3)}(-3-1) + A_3\cancel{(-3+3)}$$

$$-2 = 16A_1 \Rightarrow A_1 = -1/8.$$

- Y como el coeficiente de x^2 es 0, se tiene que:

$$0 = (A_1 + A_2) \Rightarrow A_2 = 1/8.$$

Luego finalmente se tiene que la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 5x + 3} = \frac{-1/8}{x+3} + \frac{1/8}{(x-1)} + \frac{1/2}{(x-1)^2}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.44. Descompón en fracciones simples el cociente de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 + 2x + 2}.$$

Solución.

Como el grado del numerador es menor que el del denominador, se procede a factorizar el denominador, y por Ruffini se obtiene que:

$$Q(x) = (x+1)(x^2+2),$$

luego el denominador es el producto de un factor lineal y un factor cuadrático,

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 + 2x + 2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2 x + B_1}{x^2+2},$$

y operando se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 + 2x + 2} &= \frac{A_1(x^2+2) + (A_2 x + B_1)(x+1)}{(x+1)(x^2+2)} \\ &= \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (A_2 + B_1)x + (2A_1 + B_1)}{(x+1)(x^2+2)}.\end{aligned}$$

Se igualan numeradores:

$$x^2 - 2x + 2 = (A_1 + A_2)x^2 + (A_2 + B_1)x + (2A_1 + B_1),$$

y se genera un sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 + A_2 = 1 \\ A_2 + B_1 = -2 \\ 2A_1 + B_1 = 2 \end{array}\right.$$

y resolviendo se obtienen los valores $A_1 = 5/3$, $A_2 = -2/3$ y $B_1 = -4/3$, luego la descomposición es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 + 2x + 2} = \frac{5/3}{x+1} + \frac{\frac{-2}{3}x - \frac{4}{3}}{x^2+2} = \frac{1}{3}\frac{5}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{2x+4}{x^2+2}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.45. Descompón en fracciones simples el cociente de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}.$$

Solución.

El denominador, como se puede apreciar, es el producto de dos factores cuadráticos distintos: $Q(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$,

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + 1} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2 + 2},$$

y operando se tiene:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} = \frac{(A_1 x + B_1)(x^2 + 2) + (A_2 x + B_2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$$

$$= \frac{(A_1 x + A_2 x)\, x^2 + (B_1 + B_2) x^2 + (2A_1 x + A_2 x) + (2B_1 + B_2)}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}.$$

Se igualan numeradores:

$$x^2 - 2x + 2 = (A_1 + A_2)\, x^3 + (B_1 + B_2) x^2 + (2A_1 + A_2) x + (2B_1 + B_2),$$

y se genera un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ B_1 + B_2 = 1 \\ 2A_1 + A_2 = -2 \\ 2B_1 + B_2 = 2 \end{cases}$$

y resolviendo se obtienen los valores $A_1 = -2$, $A_2 = 2$, $B_1 = 1$ y $B_2 = 0$; luego la descomposición en fracciones es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} = \frac{-2x + 1}{x^2 + 1} + \frac{2x}{x^2 + 2}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.46. Descompón en fracciones simples el cociente de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^3 + x^2 + 8x + 6}{x^4 + 4x^2 + 4}.$$

Solución.

Al intentar factorizar el denominador, se observa que es una igualdad notable, en particular el cuadrado de la suma, luego:

$$Q(x) = x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2+2)^2,$$

los factores son cuadráticos y están repetidos, con multiplicidad es $m = 2$, luego se puede escribir:

$$\frac{3x^3 + x^2 + 8x + 6}{x^4 + 4x^2 + 4} = \frac{A_1x + B_1}{x^2+2} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2+2)^2},$$

y operando se tiene:

$$\frac{3x^3 + x^2 + 8x + 6}{x^4 + 4x^2 + 4} = \frac{(A_1x + B_1)(x^2+2) + (A_2x + B_2)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{A_1x^3 + B_1x^2 + (2A_1 + A_2)x + (2B_1 + B_2)}{(x^2+2)^2},$$

igualando numeradores se tiene:

$$3x^3 + x^2 + 8x + 6 = A_1x^3 + B_1x^2 + (2A_1 + A_2)x + (2B_1 + B_2),$$

de donde al igualar coeficiente se obtiene directamente que $A_1 = 3$ y $B_1 = 1$, y a partir de ahí se tiene que $A_2 = 2$ y $B_2 = 4$, luego finalmente se tiene que la descomposición en fracciones es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^3 + x^2 + 8x + 6}{x^4 + 4x^2 + 4} = \frac{3x+1}{x^2+2} + \frac{2x+4}{(x^2+2)^2}.$$

——— ∞ ———

Problema 1.47. Halla la descomposición en fracciones simples del siguiente cociente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{(x+2)^2(x^2+2)^2}.$$

Solución.

El denominador como se puede apreciar es el producto de factores lineales repetidos y factores cuadráticos repetidos, luego se puede escribir:

$$\frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{(x+2)^2(x^2+2)^2} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3x + B_1}{(x^2+2)} + \frac{A_4x + B_2}{(x^2+2)^2},$$

y operando se tiene:

$$\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{(x+2)^2(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{A_1(x+2)(x^2+2)^2+A_2(x^2+2)^2+(A_3x+B_1)(x+2)^2(x^2+2)}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

$$+\frac{(A_4x+B_2)(x+2)^2}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

Operando e igualando numeradores se genera un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A_1+A_3=1 \\ 2A_1+A_2+4A_3+B_1=1 \\ 4A_1+6A_3+4B_1+A_4=1 \\ 8A_1+4A_2+8A_3+6B_1+4A_4+B_2=1 \\ 4A_1+8A_3+8B_1+4A_4+4B_2=1 \\ 8A_1+4A_2+8B_1+4B_2=1 \end{cases}$$

y resolviendo se obtienen los valores $A_1 = 29/36$, $A_2 = -7/12$, $A_3 = 7/36$, $B_1 = -29/36$, $A_4 = 5/6$ y $B_2 = -1/6$, luego la descomposición en fracciones simples es:

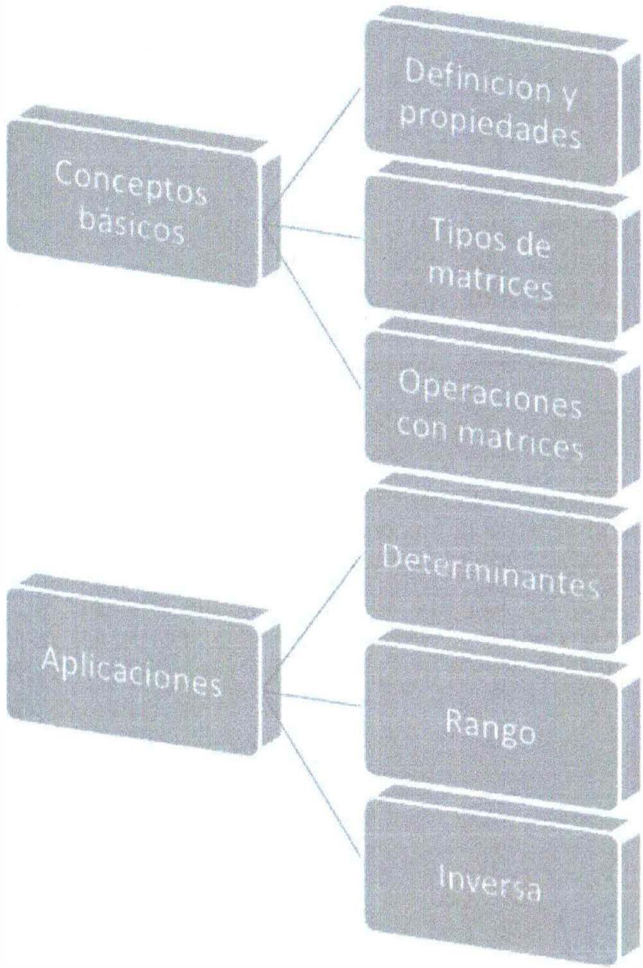
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{(x+2)^2(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{29}{36(x+2)} - \frac{7}{12(x+2)^2} + \frac{7x-29}{36(x^2+2)} + \frac{5-x}{6(x^2+2)^2}.$$

—— ∞ ——

Capítulo 2

Cálculo Matricial



Problema 2.1. Una cooperativa agrícola ha tenido unos excedentes de producción en maíz de 680 toneladas, 590 de trigo y 570 de centeno. A la vista de estos excedentes decide donarlos a cuatro ONGs. La primera recibirá 200 toneladas de maíz, 100 de trigo y 120 de centeno La segunda recibirá 110 toneladas de maíz, 130 de trigo y 200 de centeno; la tercera recibirá 220 toneladas de maíz, 200 de trigo y 100 de centeno y la cuarta ONG recibirá 150 toneladas de maíz, 160 de trigo y 150 de centeno. Expresa matricialmente cómo se distribuirán los excedentes de producción a las distintas Organizaciones.

Solución.

$$\begin{array}{cc} ONG & \begin{array}{ccc} M & T & C \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 200 \\ 150 & 160 & 150 \end{pmatrix} \end{array}$$

——— ∞ ———

Problema 2.2. Con el fin de hacer llegar los excedentes a las sedes de las distintas organizaciones la cooperativa pidió presupuestos a dos empresas de transporte E_1 y E_2. La primera cobra 500 euros por tonelada enviada a la sede de la primera, 450 por envíos a la sede de la segunda, 375 los envíos a la tercera y 350 los envíos a la sede de la cuarta ONG elegida. Por otro lado, la segunda empresa cobraba 510 por los envíos a la primera ONG, 400 por los envíos a la segunda y a la tercera y 350 por los envíos a la cuarta ONG. Expresa matricialmente los presupuestos de ambas empresas de distribución.

Solución.

$$\begin{array}{cc} ONG & \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 500 & 510 \\ 450 & 400 \\ 375 & 400 \\ 350 & 350 \end{pmatrix} \end{array}$$

——— ∞ ———

Problema 2.3. Una empresa de distribución de dispositivos electrónicos dispone de cinco tiendas para la venta de los mismos. En la tienda número uno dispone de 10 smartphones (s), 12 tablets (t), 8 portátiles (p) y 15 reproductores mp4 (m); en la segunda hay 9 smartphones, 16 tablets, 13 portátiles y 20 mp4; en la tercera hay 5 smartphones, 7 tablets, 4 portátiles y 9 mp4; en la cuarta hay 23 smartphones, 30 tablets, 15 portátiles y 40 mp4; y en la quinta hay 2 smartphones, 4 tablets, 1 portátil y 6 mp4. Expresa el inventario actual en forma de matriz.

Solución.

$$\begin{array}{c c}
\textit{Tienda} & \begin{array}{cccc} s & t & p & m \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 & 15 \\ 9 & 16 & 13 & 20 \\ 5 & 7 & 4 & 9 \\ 23 & 30 & 15 & 40 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}
\end{array}$$

—— ∞ ——

Problema 2.4. Dados los elementos siguientes:

$$a_{21} = 3,\ a_{32} = -1,\ a_{13} = 0,\ a_{31} = 6,\ a_{12} = 5 \text{ y } a_{22} = 2,$$

completa la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & -5 \\ \dots & \dots & 9 \end{pmatrix}$$

Solución.

El primer subíndice indica siempre la fila y el segundo la columna, luego:

- $a_{21} = 3$, implica fila 2 y columna 1, por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & \dots & \dots \\ 3 & \ddots & -5 \\ \dots & \dots & 9 \end{pmatrix}$$

- $a_{32} = -1$, implica fila 3 y columna 2, por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & \dots & \dots \\ 3 & \ddots & -5 \\ \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Así, se llega a:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 2.5. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determina los elementos a_{11}, a_{21}, a_{12} y a_{i3} con $i = 1,\ 2,\ \text{y}\ 3$.

b) Halla el valor de las siguientes sumas:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{2j}$$

c) Halla el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} a_{ij}$$

Solución.

a) $a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$, $a_{12} = 3$,

$$a_{i3}:\ a_{13} = 1,\ a_{23} = 7 \text{ y } a_{33} = 2.$$

b) $\sum_{j=1}^{3} a_{2j} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = 0 + (-1) + 7 = 6.$

c) $\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3} (a_{1j} + a_{2j}) =$
$= (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23}) = (1+0) + (3+(-1)) + (1+7) = 11.$

——— ∞ ———

Problema 2.6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Determina los elementos: $a_{13},\ a_{31},\ a_{i3}$ con $i = 1, 2, 3$.

b) Halla el valor de la siguiente suma $\sum_{j=1}^{3} a_{2j}$.

c) Halla el valor de la siguiente suma $\sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij} \right)$.

Solución.

a) $a_{13} = 2,\ a_{31} = 5,\ a_{13} = 2,\ a_{23} = -1$ y $a_{33} = 4$ con $i = 1, 2, 3$.

b) $\sum_{j=1}^{3} a_{2j} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = 3 + (-2) + 7$.

c) $\sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{3} (a_{1j} + a_{2j}) =$

$= (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23}) = (1 + 3) + (0 + (-2)) + (5 + (-1))$.

——— ∞ ———

Problema 2.7. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Escribe una matriz diagonal (D) cuyos elementos sean los de la diagonal principal de A.

b) Escribe una matriz columna (C) cuyos elementos sean la suma de las columnas de A.

c) Escribe una matriz fila (F) cuyos elementos se correspondan con los de la segunda columna de A.

Solución.

a)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$C = \begin{pmatrix} 1+3+1 \\ 0-1+7 \\ 5+4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 2.8. Responde justificando la respuesta:

a) Una matriz simétrica ¿puede ser hemisimétrica?

b) Una matriz simétrica ¿puede ser triangular?

c) Una matriz hemisimétrica ¿puede ser escalar?

Solución.

a) $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$.

A es simétrica si y solo si $a_{ij} = a_{ji}$ con a_{ii} no necesariamente nulos.

A es hemisimétrica si y solo si

$$a_{ij} = -a_{ji}, \text{ con } a_{ii} = 0, \forall i = 1, .., n.$$

La única posibilidad de tener a la vez:

$$\left.\begin{array}{r} a_{ij} = a_{ji} \\ a_{ij} = -a_{ji} \end{array}\right\} \text{ es } a_{ij} = 0, \forall i = 1, .., n;\ j = 1, .., n$$

Luego solo existe una matriz que sea a la vez simétrica y hemisimétrica y es la matriz nula.

b) Una matriz es triangular si los elementos por encima (o por debajo) de la diagonal son ceros. Si la matriz es simétrica, las únicas posibilidades para que sea triangular es que sea una matriz escalar o la matriz nula.

c) Una matriz escalar debe cumplir que $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$. Como además se ha de cumplir que $a_{ii} = 0, \forall i = 1, .., n$ la única posibilidad es que sea la matriz nula.

——— ∞ ———

Problema 2.9. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & 2 & 4 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$$

Establece los valores de a, b y c de forma que A sea simétrica.

Solución.

A es simétrica si $a_{ij} = a_{ji} \, \forall \, i \neq j$

$$a = a_{21} = a_{12} \Rightarrow a = 3,$$

$$b = a_{31} = a_{13} \Rightarrow b = 5,$$

$$c = a_{32} = a_{23} \Rightarrow c = 4.$$

Luego, queda la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 2.10. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ a & b & 4 \\ c & d & e \end{pmatrix}$$

Establecer los valores de a, b, c, d y e de forma que A sea hemisimétrica.

Solución.

A es hemisimétrica si

$$\begin{cases} a_{ij} = -a_{ji} & \forall \, i \neq j \\ a_{ij} = 0, & \forall \, i = j \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$b = e = 0,$$

$$a = a_{21} = -a_{12} = -2 \Rightarrow a = -2,$$

$$c = a_{31} = -a_{13} = -3 \Rightarrow c = -3,$$

$$d = a_{32} = -a_{23} = -4 \Rightarrow d = -4.$$

Luego, queda la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

—— ∞ ——

Problema 2.11. La empresa de distribución del problema 2.3 abastece de artículos a sus tiendas según la información contenida en la matriz siguiente:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 9 & 10 \\ 12 & 4 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 6 & 12 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuál es el nuevo nivel de existencias?

b) ¿Cuántos reproductores mp4 hay en la tercera tienda?

c) ¿Cuántas tablets hay en total?

Solución.

a) Llamando E a la matriz de existencias del ejercicio anterior, la matriz de existencias actuales, A, vendrá dada por:

$$A = E + D$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 & 15 \\ 9 & 16 & 13 & 20 \\ 5 & 7 & 4 & 9 \\ 23 & 30 & 15 & 40 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 9 & 10 \\ 12 & 4 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 6 & 12 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 15 & 13 & 21 \\ 9 & 18 & 22 & 30 \\ 17 & 11 & 11 & 14 \\ 32 & 38 & 21 & 52 \\ 5 & 4 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

b) En la tercera tienda hay 14 reproductores mp4 ($a_{34} = 14$).

c) El número de tablets en las distintas tiendas se recoge siempre en la segunda columna (elementos a_{i2}, $i = 1, ..., 5$), luego el número total de tablets será:

$$\sum_{i=1}^{5} a_{i2} = a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{42} + a_{52}$$

$$= 15 + 18 + 11 + 38 + 4 = 86.$$

—— ∞ ——

Problema 2.12. Las empresas de transporte del problema 2.2, al saber que los presupuestos solicitados son para una causa humanitaria, deciden aplicar una rebaja del 25 % a los mismos. ¿Cuál será el importe de la rebaja aplicada? ¿Cuál será el presupuesto entregado a la cooperativa agrícola?

Solución.

El importe de la rebaja aplicada vendrá dado por:

$$0{,}25\cdot \begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 112{,}5 & 93{,}75 & 87{,}5 \\ 127{,}5 & 100 & 100 & 87{,}5 \end{pmatrix}$$

El nuevo presupuesto para presentar a la cooperativa agrícola será:

$$\begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} - 0{,}25\cdot \begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 125 & 112{,}5 & 93{,}75 & 87{,}5 \\ 127{,}5 & 100 & 100 & 87{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 375 & 337{,}5 & 281{,}25 & 262{,}5 \\ 382{,}5 & 300 & 300 & 262{,}5 \end{pmatrix}$$

—— ∞ ——

Problema 2.13. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

determina todas las sumas que se puedan hacer con ellas sin repetir matriz. Indica las dimensiones de las nuevas matrices sin realizar los cálculos.

Solución.

Las únicas sumas que se pueden hacer teniendo en cuenta las dimensiones son

$$A + C$$

y

$$C + A$$

ya que solo se pueden sumar matrices con las mismas dimensiones. En ambos casos la matriz obtenida es de dimensión 3×2.

——— ∞ ———

Problema 2.14. Halla las matrices resultantes del ejercicio anterior.

Solución.

Se debe tener en cuenta que la suma de matrices cumple la propiedad conmutativa, por lo que $A + C = C + A$:

$$A + C = C + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 2.15. Dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

determina todas las sumas que se puedan hacer con ellas y sus transpuestas sin repetir matriz. Indica las dimensiones de las nuevas matrices sin realizar los cálculos. Calcula las matrices cuando sea posible.

Solución.

Las posibles sumas que se pueden llevar a cabo serán:

- Con dos sumandos se tienen las siguientes posibilidades:

- Son matrices 3×2

$$A + B^T$$
$$A + C$$
$$B^T + C$$

- Son matrices 2×3

$$A^T + B$$
$$A^T + C^T$$
$$B + C^T$$

- Con tres sumandos se tienen las siguientes posibilidades:
  - Son matrices 3×2

$$A + C + B^T$$

  - Son matrices 2×3

$$A^T + B + C^T$$

Los resultados de las sumas son:

- Con dos sumandos se tienen las siguientes matrices:
  - Matrices 3×2

$$A + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 0 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A + C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^T + C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matrices 2×3

$$A^T + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^T + C^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B + C^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

- Con tres sumandos se tienen las siguientes posibilidades:

  - Matrices 3×2

$$A + C + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 2 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

  - Matrices 2×3

$$A^T + B + C^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 6 & 10 \\ 4 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 2.16. Halla una matriz X que verifique $2A + X = B$ siendo A y B las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución.

Despejando en la ecuación se tiene $X = B - 2A$ y sustituyendo la matrices en la expresión queda:

$$X = B - 2A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

———— ∞ ————

Problema 2.17. Halla las matrices X e Y que verifican:

$$\begin{cases} 2X - Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$$

Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución.

En primer lugar, se resuelve el sistema sin tener en cuenta que las expresiones de X, Y, A y B son matrices y se llega a expresiones para X e Y en función de A y B.

Si se suman las dos ecuaciones se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} 2X - Y = A \\ X + Y = B \end{array}\right\} \Rightarrow 3X = A + B \Rightarrow X = \frac{1}{3}(A + B)$$

Luego

$$X = \frac{1}{3}(A+B) = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejando Y en la segunda ecuación

$$Y = B - X$$

y sustituyendo queda

$$Y = B - X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

—— ∞ ——

Problema 2.18. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

determina qué productos se pueden realizar con dos factores distintos y qué dimensiones tendrían las matrices resultantes.

Solución.

$(A_{2\times 2} \times C_{2\times 3})$, es una matriz 2×3.

$(B_{3\times 2} \times A_{2\times 2})$, es una matriz 3×2.

$(C_{2\times 3} \times B_{3\times 2})$, es una matriz 2×2.

$(B_{3\times 2} \times C_{2\times 3})$, es una matriz 3×3.

—— ∞ ——

Problema 2.19. Halla los productos obtenidos en el ejercicio anterior.

Solución.

- $$(A_{2\times 2} \times C_{2\times 3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3+(-1)\cdot 4 & 1\cdot 5+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 6+(-1)\cdot 7 \\ 0\cdot 3+2\cdot 4 & 0\cdot 5+2\cdot 1 & 0\cdot 6+2\cdot 7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 8 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

- $$(B_{3\times 2} \times A_{2\times 2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}1+0{\cdot}0 & 2{\cdot}(-1)+0{\cdot}2 \\ 1{\cdot}1+(-1){\cdot}0 & 1{\cdot}(-1)+(-1){\cdot}2 \\ -2{\cdot}1+3{\cdot}0 & -2{\cdot}(-1)+3{\cdot}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

- $$(C_{2\times 3} \times B_{3\times 2}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3{\cdot}2+5{\cdot}1+6{\cdot}(-2) & 3{\cdot}0+5{\cdot}(-1)+3{\cdot}6 \\ 4{\cdot}12+1{\cdot}1+7{\cdot}(-2) & 3{\cdot}0+1{\cdot}(-1)+7{\cdot}3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$$

- $$(B_{3\times 2} \times C_{2\times 3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}3+0{\cdot}4 & 2{\cdot}5+0{\cdot}1 & 2{\cdot}6+0{\cdot}7 \\ 1{\cdot}3+(-1)\cdot 4 & 1{\cdot}5+(-1){\cdot}1 & 1{\cdot}6+(-1){\cdot}7 \\ -2{\cdot}3+3{\cdot}4 & -2{\cdot}5+3{\cdot}1 & -2{\cdot}6+3{\cdot}7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 10 & 12 \\ -1 & 4 & -1 \\ 6 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

—— ∞ ——

Problema 2.20. Dada la matriz D, calcula D^2, D^3 y D^{25}, donde

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

- $D^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}^2$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/16 \end{pmatrix}$$

- $D^3 = D^2 \cdot D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & -1/27 & 0 \\ 0 & 0 & 1/64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^3 & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^3 \end{pmatrix}$$

- $D^{25} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}^{25} = \begin{pmatrix} (1/2)^{25} & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^{25} & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^{25} \end{pmatrix}$

——— ∞ ———

Problema 2.21. Una empresa constructora ha vendido en enero 4 pisos y dos naves industriales. Y en febrero 2 pisos y 1 nave industrial. El precio de los pisos en enero era de 150.000€ y el de las naves industriales 200.000 mientras que en febrero estos precios bajaron un 5 % en el caso de los pisos y un 10 % las naves industriales. Escribe las matrices que representan las unidades vendidas en enero y febrero (A) y los precios de venta de las mismas (B). Calcula los elementos de la diagonal de la matriz A por B y da su significado.

Solución.

La matriz de unidades vendidas es

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Pisos & Naves \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ Enero \\ Febrero \end{array}$$

Y la matriz de precios de venta es

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Enero & Febrero \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150{,}000 & 142{,}500 \\ 200{,}000 & 180{,}000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ Pisos \\ Naves \end{array}$$

Se calcula ahora el producto de $A \cdot B$, para obtener los valores de la diagonal:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150{,}000 & 142{,}500 \\ 200{,}000 & 180{,}000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}000{,}000 & 930{,}000 \\ 500{,}000 & 465{,}000 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal nos dan los ingresos de enero (elemento c_{11}) y de febrero (elemento c_{22}) para el total de ventas de pisos y naves.

——— ∞ ———

Problema 2.22. Una tienda de informática vende libros electrónicos y tablets. Las cantidades vendidas durante los tres últimos años vienen dadas por la matriz:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Libros & Tablets \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 2015 \\ 2016 \\ 2017 \end{array}$$

Los precios de venta vienen dados por la matriz:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2015 & 2016 & 2017 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 & 100 \\ 900 & 800 & 700 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ Libros \\ Tablets \end{array}$$

a) Halla la matriz $B \cdot A$

b) ¿Cuáles fueron los ingresos por la venta de libros y tablets en esos tres años?

c) ¿Cuánto se ingresó por la venta de tablets esos tres años? ¿Qué elemento de la matriz $B \cdot A$ nos da esa información?

Solución.

a) La matriz pedida es

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 300 & 200 & 100 \\ 900 & 800 & 700 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 & 1900 \\ 4900 & 7300 \end{pmatrix}$$

b) Los ingresos por venta de libros son 1300 y nos lo da el elemento $(ba)_{11}$.

Los ingresos por venta de tablets son 7300 y nos lo da el elemento $(ba)_{22}$.

Los ingresos totales por ventas son la suma de los elementos de la diagonal,

$$(ba)_{11} + (ba)_{22} = 1300 + 7300 = 8600.$$

c) Como se ha visto en el apartado anterior la venta de tablets asciende a 7300, y el elemento que nos facilita la información es $(ba)_{11}$.

——— ∞ ———

Problema 2.23. A partir de los datos del problmea 2.2 determina, usando cálculo matricial, qué gasto total haría la cooperativa si decidiera enviar sus excedentes con cada una de las empresas de transporte consultadas. ¿Cuál sería la opción más beneficiosa para la cooperativa?

Solución.

La matriz de excedentes es

$$E = \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 200 \\ 150 & 160 & 150 \end{pmatrix}$$

El coste presupuestado por las empresas viene dado por

$$C = \begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix}$$

Luego la cooperativa deberá gastar:

$$\begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 200 \\ 150 & 160 & 150 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 284500 & 239500 & 240000 \\ 286500 & 239000 & 233700 \end{pmatrix}$$

La primera fila representa los gastos de transporte por parte de la primera empresa y son:

$$284500 + 239500 + 240000 = 764000,$$

mientras que los gastos en caso de usar la segunda empresa de transporte vendrían dados por los elementos de la segunda fila, es decir,

$$286500 + 239000 + 233700 = 759200,$$

por lo que la cooperativa debería usar los servicios de la segunda empresa que tiene menores costes.

——— ∞ ———

Problema 2.24. 12. Una tienda de recuerdos turísticos vende 100 jarras, 1500 imanes y 200 bolsas de tela al mes. El precio de las jarras es de 10€, el de los imanes de 5€ y las bolsas las vende a 8€. El coste de las jarras para la tienda es de 5€, de 2€ los imanes y 4€ las bolsas. Determina los beneficios de la tienda a final de mes utilizando:

a) Conceptos totales.

b) Análisis por unidades.

c) Comprueba que se cumple la propiedad distributiva.

Solución.

a) Llamando Q al vector columna que representa la cantidad de productos vendidos, P al precio de venta de los artículos y C el coste de los productos.

$$Q = \begin{pmatrix} 100 \\ 1500 \\ 200 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los ingresos totales (IT) se obtienen como producto de las cantidades por los precios, $IT = QP$. Al tratarse de dos vectores columna, este producto no puede realizarse. Se han de multiplicar $IT = Q^TP$ o $IT = P^TQ$ que daría en ambos casos un escalar que representa los ingresos. Si se consideran los productos PQ^T o QP^T se obtendrían matrices de dimensión 3×3 que no tienen significado económico.

$$IT = P^TQ = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 1500 \\ 200 \end{pmatrix}$$
$$= 10 \cdot 100 + 5 \cdot 1500 + 8 \cdot 200 = 10100.$$

De forma análoga para hallar los costes totales se hace:

$$CT = C^TQ = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 1500 \\ 200 \end{pmatrix}$$
$$= 5 \cdot 100 + 2 \cdot 1500 + 4 \cdot 200 = 4300.$$

Luego, los beneficios totales serán:

$$B = IT - CT = 10100 - 4300 = 5800.$$

b) Analizando la situación por unidades se tiene que la matriz de márgenes unitarios viene dada por $U = P - C$, y los beneficios totales se obtienen multiplicando la matriz de márgenes unitarios por las cantidades:

$$B = U^T \cdot Q$$

$$U = P - C = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B = U^TQ = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 1500 \\ 200 \end{pmatrix}$$
$$= 5 \cdot 100 + 3 \cdot 1500 + 4 \cdot 200 = 5800.$$

c) Por tanto, queda comprobado que

$$P^TQ - C^TQ = (P - C)^TQ.$$

——— ∞ ———

Problema 2.25. Halla la matriz escalonada asociada a:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

En primer lugar, se intercambian las filas 1 y 3

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se hacen cero los elementos de la primera columna debajo de a_{11}

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3' = F_3 - 3F_1]{F_2' = F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

Se hacen cero los elementos de la segunda columna debajo de a_{22}

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & -1 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3' = F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada asociada a A es

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 2.26. Halla la matriz escalonada asociada a:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución.

En primer lugar, se intercambian las filas 1 y 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se hacen cero los elementos de la primera columna debajo de a_{11}

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2' = F_2 + 2F_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se hacen cero los elementos de la segunda columna debajo de a_{22}

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3' = F_3 - 4F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada asociada a A es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∞

Problema 2.27. Halla la matriz escalonada asociada a:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución.

Se hacen cero los elementos de la primera columna debajo de a_{11}

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4' = F_4 - F_1]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \longleftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2' = F_2 - 3F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se hacen cero los elementos de la segunda columna debajo de a_{22}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3' = F_3 - 3F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Para facilitar los cálculos se intercambian las filas 3 y 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \longleftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Se hacen cero los elementos de la tercera columna debajo de a_{33}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4' = F_4 - 2F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada asociada a A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 2.28. Calcula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución.

Al aplicar la regla de Sarrus se tiene:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3{\cdot}3{\cdot}5 + 4{\cdot}(-1){\cdot}2 + 1{\cdot}(-1){\cdot}2 - 2{\cdot}3{\cdot}2 - 4{\cdot}1{\cdot}5 - 3{\cdot}(\text{-}1){\cdot}(-1)$$

$$= 45 - 8 - 2 - 12 - 20 - 3 = 0.$$

——— ∞ ———

Problema 2.29. Calcula el valor del siguiente determinante reduciéndolo a forma triangular.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución.

Se multiplica la primera fila por dos y se resta a la segunda

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Se multiplica la primera fila por tres y se resta a la tercera

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Se multiplica la segunda fila por dos y se resta a la tercera

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2{\cdot}2{\cdot}3 = 12.$$

∞

Problema 2.30. Calcula el siguiente determinante desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Resolviendo cada determinante de orden tres se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -\left((-1)\right) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -3\,(-4+4) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -3\,(-2+2) = 0.$$

El último determinante no es necesario calcularlo pues está multiplicado por 0.

El determinante pedido es

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0.$$

——— ∞ ———

Problema 2.31. Calcula el siguiente determinante haciendo ceros previamente en alguna línea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución.

Se hacen ceros en la primera columna. Para ello, se resta la primera fila a todas las demás

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Ahora se desarrolla el determinante por la primera columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Se calcula aplicando la regla de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1{\cdot}2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 - 1{\cdot}2\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 3{=}1.$$

También se podría resolver volviendo a hacer ceros

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Y como esta es una matriz triangular su determinante es el producto de los elementos de la diagonal, es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

——— ∞ ———

Problema 2.32. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -x \\ 3 & 0 & 1 \\ x+1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Solución.

Se calcula el determinante y se iguala a 0

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -x \\ 3 & 0 & 1 \\ x+1 & 1 & 4 \end{vmatrix} x\cdot 0\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot (x+1) + 3\cdot 1\cdot (-x) +$$

$$-(x+1)\cdot 0\cdot (-x) - 1\cdot 1\cdot x - 2\cdot 3\cdot 4 = 0$$

Se opera y se despeja x

$$2x + 2 - 3x - x - 24 = 0,$$
$$-2x - 22 = 0,$$
$$x = -11.$$

—— ∞ ——

Problema 2.33. Siendo

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

aplica las propiedades de los determinantes para calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+4 & 3y & 3z+5 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$$

Solución.

Para resolver este ejercicio se aplica la siguiente propiedad de los determinantes: *«El valor de un determinante no varía si a una línea se le suma una combinación lineal de otras líneas paralelas.»*

En este caso el valor del determinante no cambia si a la tercera fila se le resta la primera:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+4 & 3y & 3z+5 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+4 & 3y & 3z+5 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

A continuación, a la segunda se le resta el triple de la primera obteniendo el determinante de valor conocido:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+4 & 3y & 3z+5 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

—— ∞ ——

Problema 2.34. Determina el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 & 8 & 12 \\ 8 & 7 & 6 & 17 & -5 \\ 7 & 5 & 1 & 22 & -1 \\ 11 & 3 & 5 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Solución.

Se trata de una matriz de dimensiones 4×5, luego el rango máximo será 4.

Como a primera vista no es sencillo encontrar una fila o columna como combinacion lineal de las demás, se van a ir orlando menores.

$$\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 84 - 32 = 52 \neq 0 \Rightarrow rgA \geq 2.$$

Orlando el determinante anterior se tiene:

$$\begin{vmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 84 + 160 + 168 - 196 - 360 - 32$$

$$= 412 - 588 = -176 \neq 0 \Rightarrow rgA \geq 3.$$

Orlando el determinante anterior se tiene:

$$\begin{vmatrix} 12 & 4 & 4 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 17 \\ 7 & 5 & 1 & 22 \\ 11 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la cuarta columna se tiene:

$$\begin{vmatrix} 12 & 4 & 4 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 17 \\ 7 & 5 & 1 & 22 \\ 11 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 17 \\ 7 & 5 & 1 & 22 \\ 11 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -8 \begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 7 & 5 & 1 \\ 11 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 68 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 11 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 88 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 11 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -8 \cdot (200 + 126 + 77 - 330 - 24 - 245)$$

$$+68 \cdot (75 + 21 + 11 - 55 - 9 - 35)$$

$$
\begin{aligned}
&-88 \cdot (105 + 24 + 66 - 77 - 54 - 40) \\
&= -8 \cdot (-196) + 68 \cdot 8 - 88 \cdot 24 = 0.
\end{aligned}
$$

Probando de la misma forma con todos los determinantes de orden 4 que se puedan formar, todos dan como resultado 0,

$$
\begin{vmatrix} 12 & 4 & 4 & 12 \\ 8 & 7 & 6 & -5 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 11 & 3 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
\begin{vmatrix} 12 & 4 & 8 & 12 \\ 8 & 7 & 17 & -5 \\ 7 & 5 & 22 & -1 \\ 11 & 3 & 0 & 13 \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
\begin{vmatrix} 4 & 4 & 8 & 12 \\ 7 & 6 & 17 & -5 \\ 5 & 1 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 0 & 13 \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
\begin{vmatrix} 12 & 4 & 8 & 12 \\ 8 & 6 & 17 & -5 \\ 7 & 1 & 22 & -1 \\ 11 & 5 & 0 & 13 \end{vmatrix} = 0,
$$

luego, el rango de A es 3.

—— ∞ ——

Problema 2.35. Determina el rango de la siguiente matriz:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Solución.

Utilizando el método de Gauss se busca la matriz escalonada equivalente.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[\substack{F_2' = F_1 + F_2 \\ F_4' = F_4 + F_2}]{}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ \bullet & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4' = F_4 - 2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3' = (1/3)\,F_3 \\ F_4' = (1/2)\,F_4}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4' = F_4 - F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Luego, se ha obtenido una matriz escalonada con cuatro filas que contienen elementos no nulos y, por tanto, el rango es cuatro.

——— ∞ ———

Problema 2.36. Deduce que el rango de la siguiente matriz es dos sin calcular determinantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 14 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución.

Se observa que la cuarta columna se obtiene como suma de la primera y la segunda, luego se puede eliminar sin afectar al rango; por tanto,

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 14 & 6 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

De forma análoga se puede eliminar la primera fila por ser suma de la segunda y la tercera:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Seguidamente, se puede ver que la tercera fila es el doble de la suma de la primera y la segunda, luego se elimina la tercera fila:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De esta forma se puede afirmar que el rango es dos, pues en la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

hay dos filas que no son proporcionales.

———— ∞ ————

Problema 2.37. Estudia el rango de la matriz de acuerdo al valor de k.

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 4 & 6 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 5 & k-1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Se calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} k-2 & 4 & 6 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 5 & k-1 \end{vmatrix} = (k-2)k(k-1) = 0 \Leftrightarrow k = 0, 1, 2.$$

Luego, se tiene:

- Si $k = 0 \Rightarrow rgA = rg\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = 2.$
- Si $k = 1 \Rightarrow rgA = rg\begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$
- Si $k = 2 \Rightarrow rgA = rg\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2.$

- Si $k \neq 0,1,2 \Rightarrow rgA = rg\begin{pmatrix} k-2 & 4 & 6 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 5 & k-1 \end{pmatrix} = 3.$

———— ∞ ————

Problema 2.38. Estudia el rango de la matriz de acuerdo al valor de k:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 3 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 7 & 5 & k-1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Calculando el determinante:

$$\begin{vmatrix} k-2 & 3 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 7 & 5 & k-1 \end{vmatrix} = (k-2)k(k-1) = 0 \Leftrightarrow k = 0,1,2.$$

- Si $k = 0$

$$rgA = rg\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

- Si $k = 1$

$$rgA = rg\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = 2.$$

- Si $k = 2$

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

- Si $k \neq 0,1,2 \Rightarrow rgA = 3.$

———— ∞ ————

Problema 2.39. Estudia el rango de la matriz de acuerdo al valor de m.

$$\begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Para hacer el estudio del rango se aplica en este caso el método de Gauss.

En primer lugar, se cambian de orden las columnas uno y tres para que la primera no contenga el parámetro.

$$\begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \longleftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & m \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación, se opera para obtener la matriz escalonada equivalente:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & m \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3' = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & m \\ 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & m \\ 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ 0 & -1 & m \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ 0 & -1 & m \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \longleftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$$

Donde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$$

es una matriz escalonada en la que se pueden dar los siguientes casos:

- Si $m \neq 0, 1$, las tres filas tienen al menos un elemento distinto de cero y el rango es 3.

- Si $m = 1$, la matriz sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  y el rango sería 2 ya que hay dos filas con elementos distintos de cero.

- Si $m = 0$, la matriz sería equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3' = F_3 + F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y como solo hay dos filas con elementos distintos de cero, su rango sería 2.

——— ∞ ———

Problema 2.40. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halla el determinante de A.

b) Halla la matriz adjunta de A.

c) Halla la matriz transpuesta de $AdjA$.

d) Halla la matriz inversa de A.

Solución.

a) Al ser una matriz triangular se sabe que el valor del determinante es el producto de los elementos de la diagonal, $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

Si se calcula el determinante, en cualquier caso:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 4 - 0 \cdot 2 \cdot 4 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 3 = 4.$$

b) La matriz adjunta es la que en cada elemento tiene el adjunto correspondiente.

$$AdjA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Para hallar la matriz transpuesta de la adjunta, se escribe en cada posición a_{ij}, el elemento a_{ji}:

$$(AdjA)^T = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Finalmente se halla la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 2.41. Halla la inversa de la siguiente matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Por el método de la adjunta.

b) Por el método de Gauss.

Solución.

a) Método de la adjunta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 12 + 6 - 4 = 13.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$AdjA = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 6 \\ 6 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AdjA)^T = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3' = F_3 - 2F_1]{F_2' = F_2 - 2F_1;} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2' = -F_2]{F_3' = F_3 + 2F_2;} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -6 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3' = F_3/(-13)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6/13 & -2/13 & -1/13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2' = F_2 - 4F_3]{F_1' = F_1 - 3F_3;} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/13 & 6/13 & 3/13 \\ 0 & 1 & 0 & 2/13 & -5/13 & 4/13 \\ 0 & 0 & 1 & 6/13 & -2/13 & -1/13 \end{array}\right)$$

Con lo cual,

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 2.42. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra el valor de x, tal que: $B^2 = A$.

b) Encuentra el valor de x, tal que: $B + C = A^{-1}$.

c) Encuentra el valor de x, tal que: $A + B + C = 3I_2$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2.

Solución.

a) Operando se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B^2 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix},$$

e igualando las dos expresiones elemento a elemento se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} 1+x^2=2 \\ x=1 \\ x=1 \\ x^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x=1 \\ x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1.$$

b) Se calcula la inversa de A mediante el método de Gauss:

$$(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2' = F_2 - F_1/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2' = 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1' = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1' = F_1/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, se tiene:

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

e igualando término a término se tiene:

$$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0.$$

c) Se calcula:

$$A+B+C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix}$$

y como

$$3I_2=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

igualando término a término se obtiene $x=0$.

——— ∞ ———

Problema 2.43. Sean la matrices:

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula α para que $A^{-1}=\frac{1}{12}A$.

b) Para $\alpha=-3$, determine la matriz X tal que $A^TX=B$.

Solución.

a) Se calcula la inversa de A mediante el método de Gauss:

$$(A\,|\,I)=\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ -\alpha & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/(4\alpha) & -1/(4\alpha) \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 3/(4\alpha) & -1/(4\alpha) \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Despejando en $A^{-1}=\frac{1}{12}A$ se tiene que

$$12A^{-1}=A.$$

Y por tanto,

$$\begin{pmatrix} 9/\alpha & -3/\alpha \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término:

$$\left.\begin{array}{c} 9/\alpha = \alpha \\ -3/\alpha = 1 \\ 3 = -\alpha \\ 3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = -3$$

b) En primer lugar, se despeja X en la ecuación dada y nos queda:

$$A^T X = B \Rightarrow X = \left(A^T\right)^{-1} B.$$

Seguidamente se halla A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y calculando su inversa:

$$\left(A^T|I\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1' = F_1/(-3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1/3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2' = F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 4 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2' = F_2/4} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/12 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1' = F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/12 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(A^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se opera para obtener el valor de X:

$$X = (A^T)^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/12 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -1/6 & 5/4 & 7/12 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 2.44. Halla una matriz X que verifique $A^2 + BX = C$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

En primer lugar, se despeja X en la ecuación dada como si se tratará de variables y no de matrices y queda:

$$BX = C - A^2 \Rightarrow X = B^{-1}\left(C - A^2\right)$$

donde

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y, por tanto,

$$C - A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Se calcula la inversa de B:

$$(B \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1' = F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2' = -F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1' = F_1/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

———— ∞ ————

Problema 2.45. Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución.

Se despeja X en la expresión inicial y se tiene:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Se calcula la inversa por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

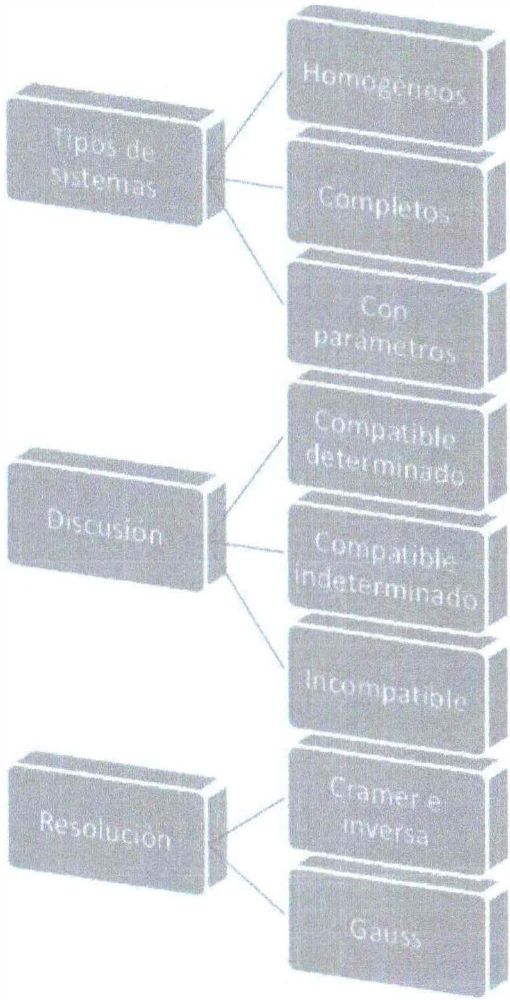
Sustituyendo y operando se tiene:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -7/2 \\ 5/2 & 5/2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Capítulo 3

SISTEMAS DE ECUACIONES



Problema 3.1. En un restaurante hacen pedidos al distribuidor de leche y agua de forma online y se obtiene un 10 % de descuento en la leche y un 12,5 % en el agua. Al hacer un pedido de 200 litros de leche y 480 botellines de agua se han de pagar 348 euros y se ahorran 44 euros. Calcula los precios originales de los productos y el precio unitario pagado por cada uno.

Solución.

En primer lugar, se plantea el sistema a partir del enunciado. El coste de los productos permite escribir la primera ecuación, sea x el precio del litro de leche y sea y el precio de cada botellín de agua antes de descuentos, por tanto, el precio de la compra será lo pagado más el descuento:

$$200x + 480y = 348 + 44.$$

El ahorro viene dado por la siguiente ecuación:

$$200 \cdot 0,1 \cdot x + 480 \cdot 0,125 \cdot y = 44.$$

Se tiene, por tanto, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 200x + 480y = 392 \\ 20x + 60y = 44 \end{cases}$$

que se va a resolver por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c} 200 & 480 & 392 \\ 20 & 60 & 44 \end{array} \right)$$

y operando se tiene:

$$\xrightarrow{F_2' = F_1 - 10F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 200 & 480 & 392 \\ 0 & -120 & -48 \end{array} \right)$$

de donde, por la segunda ecuación, se obtiene:

$$y = \frac{-48}{-120} = 0,4$$

y sustituyendo en la primera ecuación:

$$200x + 480y = 392 \Rightarrow 200x + 192 = 392,$$

$$200x = 200 \Rightarrow x = \frac{200}{200} = 1.$$

Luego, la solución es $(1\ ;\ 0,4)$, es decir, el precio del litro de leche es 1 euro y el precio del botellín de agua es 0,40 euros.

—— ∞ ——

Problema 3.2. Determina la compatibilidad del siguiente sistema y halla sus soluciones por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 2x + y + z = 4 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Solución.

Se escribe el sistema en forma de tabla

$\boxed{1}$	1	−1	−1
2	1	1	4
−1	2	1	1

Se aplican las siguientes transformaciones:

$$F_3' = F_3 + F_1,$$
$$F_2' = F_2 - 2F_1,$$

con lo que se tiene esta tabla:

x	y	z	
$\boxed{1}$	1	−1	−1
0	−1	3	6
0	3	0	0

A continuación, se conmutan las columnas segunda y cuarta, lo cual equivale a cambiar el orden de los sumandos en las ecuaciones,

x	z	y	
$\boxed{1}$	-1	1	-1
0	3	-1	6
0	0	3	0

de modo que el sistema asociado será:

$$\left\{\begin{aligned} x - z + y &= -1 \\ 3z + y &= 6 \\ 3y &= 0 \end{aligned}\right.$$

De la tercera ecuación se obtiene $y = 0$, sustituyendo en la segunda proporciona el valor de z, $3z + 0 = 6$ luego, $z = 2$.

Y por último, sustituyendo ambos valores en la primera ecuación se obtiene el valor de x:

$$x - z + y = -1 \Rightarrow x = -1 - y + z \Rightarrow x = -1 - 0 + 2 = 1.$$

De modo que la solución viene dada por

$$(1, 0, 2).$$

——— ∞ ———

Problema 3.3. Determina la compatibilidad del siguiente sistema y calcula sus soluciones por el método de Gauss-Jordan:

$$\left\{\begin{aligned} 2x - y + 3z - 7t &= 5 \\ 6x - 3y + z - 4t &= 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t &= 18 \end{aligned}\right.$$

Solución.

Se escribe en forma de tabla el sistema:

$\boxed{2}$	-1	3	-7	5
6	-3	1	-4	7
4	-2	14	-31	18

Se aplican las siguientes transformaciones:

$$F_3' = F_3 - 2F_1,$$
$$F_2' = F_2 - 3F_1,$$

con lo que se tiene la tabla:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 17 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -17 & 8 \end{array}\right]$$

Por último, al aplicar la transformación

$$F_3' = F_2 + F_3,$$

se obtiene la tabla:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Luego, se trata de un sistema compatible indeterminado (SCI) cuya solución viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x - y + 3z - 7t = 5 \\ -8z + 17t = -8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{r} 3z - 7t = 5 - 2x + y \\ -8z + 17t = -8 \end{array} \right.$$

$$z = \frac{-8 - 17t}{-8} = \frac{8 + 17t}{8},$$

$$t = \frac{5 - 2x + y - 3z}{-7} = \frac{5 - 2x + y - 3\dfrac{8 + 17t}{8}}{-7} = \frac{16 - 16x + 8y - 17t}{-56}.$$

Por tanto, la solución es

$$\left(x, y, \frac{8 + 17t}{8}, \frac{16 - 16x + 8y - 17t}{-56} \right).$$

——— ∞ ———

Problema 3.4. Estudia la compatibilidad del siguiente sistema y resuélvelo:

$$\left\{ \begin{array}{r} x + 2y + z - t = 42 \\ 2x + 3y - 2z - 3t = 72 \\ x + y - 3z - 2t = 30 \end{array} \right.$$

Solución.

Se escribe en forma de tabla

1	2	1	−1	42
2	3	−2	−3	72
1	1	−3	−2	30

Se aplican las siguientes transformaciones:

$$F_3' = F_3 - F_1,$$
$$F_2' = F_2 - 2F_1,$$

con lo que se tiene la tabla:

1	2	1	−1	42
0	−1	−4	−1	−12
0	−1	−4	−1	−12

A continuación, se resta la segunda fila a la tercera y se tiene:

1	2	1	−1	42
0	−1	−4	−1	−12
0	0	0	0	0

Es decir, se trata de un sistema compatible indeterminado en el que las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 42 \\ -y - 4z - t = -12 \end{cases}$$

Considerando variables independientes x e y se tiene:

$$\begin{cases} x + 2y = 42 - z + t \\ -y = -12 + 4z + t \end{cases}$$

Luego,

$$y = \frac{-12 + 4z + t}{-1} = 12 - 4z - t,$$

$$x = 42 - z + t + 2(-12 + 4z + t) = -2 + 7z + 3t.$$

——— ∞ ———

Problema 3.5. Resuelve el siguiente sistema por el método de Gauss-Jordan:

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y+8z+3t=1 \\ x+y+5z+2t=2 \\ x+3z+t=3 \\ 3x+3y+16z+7t=4 \end{array}\right.$$

Solución.

En este caso se va a prescindir de la representación en forma de tabla y se va a usar la siguiente expresión, ya utilizada en el cálculo de matrices inversas.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 16 & 7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4' = 3F_1 - F_4]{F_2' = F_1 - F_2;\ F_3' = F_1 - F_3;} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 8 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4' = F_4 - 3F_2]{F_3' = F_3 - 2F_2;} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Cambiando de orden las filas 3 y 4 se tiene:

$$\xrightarrow{F_4 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que proporciona el sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y+8z+3t= 1 \\ y+3z+t=-1 \\ -z-t= 2 \\ -z= 0 \end{array}\right.$$

de donde, por la cuarta ecuación se obtiene:

$$z = 0.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación:

$$-0 - t = 2 \Rightarrow t = -2.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$y + 3 \cdot 0 + (-2) = -1 \Rightarrow y = 1,$$

y, finalmente, sustituyendo en la primera ecuación:

$$x + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = 1 \Rightarrow x = 5.$$

Luego, la solución es (5, 1, 0, −2).

——— ∞ ———

Problema 3.6. Determina la compatibilidad del siguiente sistema y halla sus posibles soluciones por el método de Gauss-Jordan:

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2z = 3 \\ 2x - 3y = 1 \\ x + y = -1 \\ y + z = 2 \end{array}\right.$$

Solución.

La expresión en forma de tabla del sistema es

$$\begin{array}{|rrr|r|} \hline \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Se aplican las siguientes transformaciones:

$$\begin{array}{c} F_3' = F_3 - F_1 \\ F_2' = F_2 - 2F_1 \end{array}$$

con lo que se tiene la tabla:

1	0	2	3
0	−3	−4	−5
0	1	−2	−4
0	1	1	2

A continuación, se hace el cambio,

$$F_2 \longleftrightarrow F_4$$

con lo que se tiene la tabla:

1	0	2	3
0	1	1	2
0	1	−2	−4
0	−3	−4	−5

Aplicando las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} F_3' &= F_3 - F_2, \\ F_4' &= F_4 + 3F_2, \end{aligned}$$

se tiene:

1	0	2	3
0	1	1	2
0	0	−3	−6
0	0	−1	1

A continuación, se hace el cambio,

$$F_3 \longleftrightarrow F_4,$$

con lo que se tiene la tabla:

1	0	2	3
0	1	1	2
0	0	−1	1
0	0	−3	−6

Se aplica la siguiente transformación:

$$F_4' = F_4 - 3F_3,$$

y se tiene la tabla:

$$\begin{array}{|ccc|c|}
\hline
\boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -9 \\
\hline
\end{array}$$

Y, por tanto, el sistema es incompatible ya que se llega a una contradición $0 = -9$.

——— ∞ ———

Problema 3.7. Dada la siguiente igualdad matricial, escribe las ecuaciones del sistema que representa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solución.

En primer lugar, se multiplican las matrices:

$$\begin{pmatrix} 3x + 5y \\ 1x + 0y \\ -4x + 7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

A continuación, se igualan los elementos de las dos matrices columnas obtenidas.

$$\left\{ \begin{array}{r} 3x + 5y = 1 \\ 1x + 0y = 2 \\ -4x + 7y = 5 \end{array} \right.$$

——— ∞ ———

Problema 3.8. Escribe en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{array} \right.$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 3.9. Dos hermanos, Diana y Raúl, van a comprar discos y películas. Diana compra 1 película y 2 discos de música. Raúl compra 2 películas y 3 discos.

a) Escribe la matriz 2 por 2 que expresa el número de discos y películas comprados por cada uno.

b) Si han gastado 42 y 72 euros respectivamente, escribe el sistema de ecuaciones y calcula el precio de las películas y de los discos.

Nota: Resolver por el método de Gauss o por algún otro método matricial (Cramer o matriz inversa).

Solución.

a) De acuerdo al enunciado, la matriz de compras queda así:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \textit{Películas} & \textit{Discos} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \textit{Diana} \\ \textit{Raúl} \end{array} \end{array}$$

b) El sistema sería el siguiente llamando x a las películas e y a los discos comprados:

$$\begin{cases} x + 2y = 42 \\ 2x + 3y = 72 \end{cases}$$

Se va a resolver por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 42 \\ 2 & 3 & 72 \end{array} \right)$$

Operando se tiene:

$$\xrightarrow{F_2' = 2F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 42 \\ 0 & 1 & 12 \end{array} \right)$$

de donde, por la segunda ecuación, se obtiene:

$$y = 12,$$

sustituyendo en la primera ecuación:

$$x + 2y = 42 \Rightarrow x + 24 = 42$$

$$\Rightarrow x = 18.$$

Luego, la solución es (18 ; 12), es decir, cada película cuesta 18 euros y cada disco cuesta 12 euros.

—— ∞ ——

Problema 3.10. Dado el siguiente sistema de ecuaciones, comprueba si es un sistema de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelo:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Solución.

Para comprobar si es un sistema de Cramer hay que ver si el determinante de la matriz de coeficientes asociados (A) es distinto de cero, es decir, $|A| \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 - 1 - 1 - 4 + 3 = 5 \neq 0$$

Luego, se trata de un sistema de Cramer.

La solución viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-5}{5} = -1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10}{5} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

——— ∞ ———

Problema 3.11. Dado el siguiente sistema de ecuaciones, comprueba si es un sistema de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelo:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + 2z = 20 \end{cases}$$

Solución.

Para comprobar si es un sistema de Cramer hay que ver si el determinante de la matriz de coeficientes asociados (A) es distinto de cero, es decir, $|A| \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 3 - 6 - 2 - 2 = -11 \neq 0.$$

Luego se trata de un sistema de Cramer.

La solución viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 20 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 3 & 20 & 2 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-33}{-11} = 3,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 20 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-44}{-11} = 4.$$

——— ∞ ———

Problema 3.12. Dado el siguiente sistema de ecuaciones comprueba si es un sistema de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelo:

$$\begin{cases} 5x + 7y + 4z &= 286 \\ 6x + 4y - 9z &= 89 \\ 8x + 9y - 2z &= 311 \end{cases}$$

Solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & -9 \\ 8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = -40 + 216 - 504 - 128 + 405 + 84 = 33 \neq 0$$

Cómo $|A| \neq 0$, se trata de un sistema de Cramer.

La solución viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 286 & 7 & 4 \\ 89 & 4 & -9 \\ 311 & 9 & -2 \end{vmatrix}}{33} = \frac{759}{33} = 23,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 286 & 4 \\ 6 & 89 & -9 \\ 8 & 311 & -2 \end{vmatrix}}{33} = \frac{561}{33} = 17,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 & 286 \\ 6 & 4 & 89 \\ 8 & 9 & 311 \end{vmatrix}}{33} = \frac{429}{33} = 13.$$

——— ∞ ———

Problema 3.13. Discute y resuelve si es posible:

$$\left\{ \begin{aligned} x + 2y + 8z &= 1 \\ x + y + 5z &= 2 \\ 2x + 3z &= 3 \end{aligned} \right.$$

Solución.

La expresión matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = C.$$

Se estudia el rango de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

como el determinante de A es distinto de cero, el rango es tres y por tanto se trata de un sistema de Cramer. Se puede resolver por el método de la matriz inversa, usando la regla de Cramer o por el método de Gauss.

Método de la inversa:

$$AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C.$$

La inversa de la matriz de coeficientes viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 7 & -13 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución será

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 7 & -13 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

——— ∞ ———

Problema 3.14. Discute y resuelve si es posible:

$$\begin{cases} 3x + 7y + 4z = 17 \\ x + 4y + 3z = 9 \\ 4x + y - 3z = 6 \end{cases}$$

Solución.

La matriz de coeficientes viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

y la matriz ampliada es

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 4 & 17 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \end{array} \right)$$

Se estudian los rangos y se aplica el teorema de Rouché-Frobenius para determinar la compatibilidad.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

que es debido a que la columna segunda es la suma de la primera y la tercera.

Por tanto, como

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 7 = 5 \neq 0 \Rightarrow rgA = 2.$$

Como todos los menores de orden tres son nulos,

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 17 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 3 & 4 & 17 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 17 \\ 1 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 & 17 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

entonces, se tiene que

$$rgB = rg \begin{pmatrix} 3 & 4 & 17 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} = 2.$$

Por tanto, es un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad:

$$\left\{ \begin{array}{r} 3x + 7y = 17 - 4z \\ x + 4y = 9 - 3z \\ 4x + y = 6 + 3z \end{array} \right.$$

Se crea un sistema con las dos primeras ecuaciones que son las que han proporcionado un menor de orden 2 no nulo:

$$\left\{ \begin{array}{r} 3x + 7y = 17 - 4z \\ x + 4y = 9 - 3z \end{array} \right.$$

Resolviendo por Cramer, siendo ahora la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 17-4z & 7 \\ 9-3z & 4 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5+5z}{5} = 1+z,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 17-4z \\ 1 & 9-3z \end{vmatrix}}{5} = \frac{10-5z}{5} = 2-z.$$

Luego, la solución es $(1+z,\ 2-z,\ z)$.

——— ∞ ———

Problema 3.15. Resuelve, si es posible, el sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} x+y+z+t &= 8 \\ x+2y+3z+4t &= 12 \\ 3x-y-5z-9t &= 8 \\ x+9y+17z+25t &= 40 \end{aligned} \right.$$

Solución.

Sean A la matriz de coeficientes y B la matriz ampliada, estudiando los rangos:

$$rgA = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -5 & -9 \\ 1 & 9 & 17 & 25 \end{pmatrix}$$

Restando la primera columna al resto de columnas, el rango no varía:

$$rgA = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -8 & -12 \\ 1 & 8 & 16 & 24 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que las columnas 3 y 4 se obtienen multiplicando la segunda por 2 y 3 respectivamente, luego se eliminan quedando:

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = 2.$$

Se sabe, por tanto, que el rango máximo de la matriz B puede ser 3.

$$rgB = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 12 \\ 3 & -1 & -5 & -9 & 8 \\ 1 & 9 & 17 & 25 & 40 \end{pmatrix}$$

Restando la primera columna al resto de columnas excepto a la quinta, a la que se resta la primera multiplicado por 8, se tiene:

$$rgB = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -8 & -12 & -16 \\ 1 & 8 & 16 & 24 & 32 \end{pmatrix}$$

Como la quinta columna es igual a 4 por la segunda columna, se elimina y por tanto $rgB = 2$.

Luego, se trata de un sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad.

Su solución se obtiene a partir de:

$$\left\{ \begin{array}{r} x+y+z+t=8 \\ x+2y+3z+4t=12 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x+y=8-z-t \\ x+2y=12-3z-4t \end{array} \right.$$

Resolviendo por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8-z-t \\ 1 & 2 & 12-3z-4t \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_2' = F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8-z-t \\ 0 & 1 & 4-2z-3t \end{array} \right)$$

de donde se obtiene:

$$y = 4 - 2z - 3t.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x + 4 - 2z - 3t = 8 - z - t \Rightarrow x = 4 + z + 2t.$$

Luego, la solución es $(4 + z + 2t,\ 4 - 2z - 3t,\ z,\ t)$.

—— ∞ ——

Problema 3.16. Resuelve, si es posible, el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 7y + 4z = 17 \\ x + 4y + 3z = 9 \\ 9x + 11y + 2z = 13 \end{cases}$$

Solución.

Sean A la matriz de coeficientes y B la matriz ampliada, estudiando los rangos:

$$rgA = rg \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 9 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

La segunda columna es la suma de la primera y de la tercera, se elimina la columna y el rango no varía:

$$rgA = rg \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

El rango de la matriz B, como mucho puede ser 3.

$$rgB = rg \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 17 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \\ 9 & 11 & 2 & 13 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 3 & 4 & 17 \\ 1 & 3 & 9 \\ 9 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 17 \\ 1 & 3 & 9 \\ 9 & 2 & 13 \end{vmatrix} = 117 + 34 + 324 - 459 - 54 - 52 = -90 \neq 0,$$

entonces $rgB = 3$, por tanto, y como los rangos son distintos, es un sistema incompatible.

——— ∞ ———

Problema 3.17. Estudia la compatibilidad del siguiente sistema y resuélvelo:

$$\left\{ \begin{aligned} x + 2y + 7z + 3t &= 1 \\ x + y + 5z + 2t &= 2 \\ x + 3z + t &= 3 \\ 3x + 3y + 16z + 7t &= 4 \end{aligned} \right.$$

Solución.

Se estudia el rango de la matriz A de coeficientes, por las dimensiones del sistema se sabe que $rgA \leq 4$.

$$rgA = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

y haciendo ceros en la primera columna se tiene:

$$rgA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora se puede comprobar que la tercera fila es igual al doble de la segunda, luego $rgA \leq 3$.

Se toma un menor de orden 3 en la matriz original:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 16 & 7 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Por tanto, $rgA = 3$.

Estudiando el rango de la matriz ampliada B, los posibles determinantes de orden 4 son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 16 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & -9 & -4 \\ 0 & -6 & -18 & -8 \\ 4 & 3 & 16 & 7 \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues } F_3 = 2F_2),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 16 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 16 & 7 \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues } F_3 = 2F_2),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues } F_3 = 2F_2),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 16 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & 16 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues } F_3 = 2F_2).$$

Por tanto, $rgA = rgB = 3 < n = 4$, y el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad.

Se toman las ecuaciones que han proporcionado el menor de orden 3 no nulo

$$\left\{ \begin{aligned} y + 5z + 2t &= 2 - x \\ 3z + t &= 3 - x \\ 3y + 16z + 7t &= 4 - 3x \end{aligned} \right.$$

y resolviendo por Cramer:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2-x & 5 & 2 \\ 3-x & 3 & 1 \\ 4-3x & 16 & 7 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-3+x}{2},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-x & 2 \\ 0 & 3-x & 1 \\ 3 & 4-3x & 7 \end{vmatrix}}{2} = \frac{5-x}{2},$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2-x \\ 0 & 3 & 3-x \\ 3 & 16 & 4-3x \end{vmatrix}}{2} = \frac{-9+x}{2}.$$

Luego, la solución es $\left(x, \dfrac{-3+x}{2}, \dfrac{5-x}{2}, \dfrac{-9+x}{2}\right)$.

——— ∞ ———

Problema 3.18. Estudia la compatibilidad del siguiente sistema y resuélvelo:

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y + 7z + 3t + 4v &= 1 \\ x + y + 5z + 2t + 5v &= 2 \\ x + 3z + t + 2v &= 3 \\ 3x + 3y + 16z + 7t + 3v &= 4 \end{aligned}\right.$$

Solución.

Se estudia el rango de la matriz A de coeficientes, por las dimensiones del sistema $rgA \leq 4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 16 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que las cuatro primeras columnas coinciden con el ejercicio anterior, donde se había comprobado que el rango para ellas era 3.

La única posibilidad de tener un rango igual a 4 es orlar con la quinta columna el menor de orden 3 no nulo obtenido en el ejercicio anterior:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 16 & 7 \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 16 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

Haciendo ceros en la primera columna, $(F_1' = F_1 - 2F_2;\ F_4' = F_4 - 3F_2)$

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 & -6 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -12 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -3 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -12 \end{vmatrix} = 8$$

Luego $rgA = rgB = 4 \leq n = 5$ es un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad, asociado a la variable x que pasa a considerarse como un parámetro.

Intercambiando las dos primeras ecuaciones se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{c} y + 5z + 2t + 5v = 2 - x \\ 2y + 7z + 3t + 4v = 1 - x \\ 3z + t + 2v = 3 - x \\ 3y + 16z + 7t + 3v = 4 - 3x \end{array} \right.$$

Resolviendo por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 5 & 2-x \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 1-x \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 3-x \\ 3 & 16 & 7 & 3 & 4-3x \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[F_4' = F_4 - 3F_1]{F_2' = F_2 - 2F_1;} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 5 & 2-x \\ 0 & -3 & -1 & -6 & -3+x \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 3-x \\ 0 & 1 & 1 & -12 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 5 & 2-x \\ 0 & 1 & 1 & -12 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 3-x \\ 0 & -3 & -1 & -6 & -3+x \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[F_4' = F_4 + F_3]{F_3' = F_3 - 3F_1;} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 5 & 2-x \\ 0 & 1 & 1 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 38 & 9-x \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente asociado sería:

$$\left\{ \begin{array}{r} y + 5z + 2t + 5v = 2 - x \\ z + t - 12v = \ -2 \\ -2t + 38v = 8 - x \\ -4v = \ \ 0 \end{array} \right.$$

de donde, por la cuarta ecuación:

$$v = 0,$$

sustituyendo en la tercera ecuación:

$$-2t + 38 \cdot 0 = 9 - x \Rightarrow t = \frac{x-9}{2},$$

sustituyendo en la segunda ecuación:

$$z + t - 12 \cdot 0 = -2 \Rightarrow z = -2 - t = -2 - \frac{x-9}{2} = \frac{5-x}{2},$$

y, finalmente, sustituyendo en la primera ecuación:

$$y + 5 \cdot (-2 - t) + 2t + 5 \cdot 0 = 2 - x$$

$$y + 5\frac{5-x}{2} + 2\frac{x-9}{2} + 5 \cdot 0 = 2 - x$$

$$2y + 25 - 5x + 2x - 18 = 4 - 2x$$

$$2y + 7 - 3x = 4 - 2x$$

$$2y = x - 3 = \frac{x-3}{2}$$

$$y = \frac{x-3}{2}.$$

Luego, la solución es:

$$\left(x, \frac{x-3}{2}, \frac{5-x}{2}, \frac{x-9}{2}, 0\right).$$

——— ∞ ———

Problema 3.19. Estudia la compatibilidad del siguiente sistema y resuélvelo cuando sea posible:

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y + 7z + 3t + 4v &= 1 \\ x + y + 5z + 2t + 3v &= -2 \\ x + 3z + t + 2v &= -3 \\ 3x + 3y + 16z + 6t + 9v &= 4 \end{aligned}\right.$$

Solución.

En este caso se estudia el rango de la matriz asociada A y de la matriz ampliada B al unísono aplicando operaciones que conservan el rango:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 16 & 6 & 9 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4' = F_4 - 3F_2]{F_2' = -F_2 + F_1;\ F_3' = -F_3 + F_1;} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3' = -F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

Observando las columnas que pertenecen a A, la fila tercera es de ceros, luego el $rgA \leq 3$.

Con la restantes filas y las tres primeras columnas se puede formar un menor de orden 3 no nulo, por tanto, $rgA = 3$.

Para estudiar el rango de B, la cuarta columna es la suma de la primera y la segunda y la quinta es dos veces la primera más la segunda, luego se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

cuyo determinante se puede desarrollar y comprobar fácilmente que es distinto de 0, luego $rgB = 4$. Por tanto el sistema es incompatible.

——— ∞ ———

Problema 3.20. Discute y resuelve cuando sea posible el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{aligned} 2x + y - z - 3u &= 2 \\ 4x + z - 7u &= 3 \\ 2y - 3z + u &= 1 \\ 2x + 3y - 4z - 2u &= 3 \end{aligned}\right.$$

Solución.

Se estudian los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que la cuarta fila es la suma de la primera y la tercera, luego,

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

y también que la primera fila es la mitad de la suma de las filas 2 y 3, luego,

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Por otro lado,

$$rgB = rg\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

y al igual que en el caso de A, se cumple que

$$F_4 = F_1 + F_3,$$

$$F_1 = 1/2(F_2 + F_3),$$

luego,

$$rgB = rg\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) = 2.$$

Se trata, por tanto, de un sistema compatible determinado con 2 grados de libertad,

$$\begin{cases} 4x = -z + 7u + 3 \\ 2y = 3z - u + 1 \end{cases}$$

de donde se puede obtener la solución directamente:

$$x = \frac{-z + 7u + 3}{4},$$

$$y = \frac{3z - u + 1}{2}.$$

La solución es:

$$\left(\frac{-z + 7u + 3}{4}, \frac{3z - u + 1}{2}, z, u\right).$$

—— ∞ ——

Problema 3.21. Discute y resuelve cuando sea posible el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 4x + 5y - 5z = 4 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Solución.

Se estudian los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada al unísono:

$$rg\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

y como la columna correspondiente a los términos independientes es igual a la primera columna se puede afirmar que $rgA = rgB \leq 3$.

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sumando a la primera columna la segunda, y a la tercera columna la segunda se tiene:

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si se elimina la segunda fila se tiene el menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Por tanto, $rgA = rgB = n = 3$, se trata de un sistema compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{c} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right.$$

Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12}{12} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{12} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{12} = 0.$$

Luego, la solución es (1, 0, 0).

——— ∞ ———

Problema 3.22. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Solución.

Se trata de un sistema homogéneo, por tanto, tendrá como mínimo la solución trivial $(0, 0, 0)$.

Para saber si existen más soluciones se estudia el rango de la matriz asociada,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y entonces $rgA = 2$, luego, existen soluciones distintas de la trivial.

Tomando el menor de orden 2,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

el sistema queda:

$$\begin{cases} x + 2y = -3z \\ x + y = -2z \end{cases}$$

y aplicando el Método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3z \\ 1 & 1 & -2z \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_2' = F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3z \\ 0 & -1 & z \end{array} \right)$$

de donde

$$y = -z,$$

que sustituyendo en la primera ecuación:

$$x + 2(-z) = -3z \Rightarrow x = -z.$$

Luego, la solución es $(-z,\ -z,\ z)$.

——— ∞ ———

Problema 3.23. Estudia si el siguiente sistema admite soluciones distintas de la trivial y resuélvelo en caso afirmativo:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + 5y + 3z = 0 \\ 6x - 5y - 2z = 0 \end{array} \right.$$

Solución.

Estudiando el rango de la matriz asociada A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -20 - 10 + 54 - 60 + 30 + 6 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7 \neq 0.$$

El rango de A es 2, se puede asegurar que existe solución distinta de la trivial, pues $rgA = 2 \leq 3$ que es el número de incógnitas.

El sistema se va a resolver por Cramer a partir de las ecuaciones que han dado lugar al menor no nulo de orden 2:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y = -2z \\ x + 5y = -3z \end{array} \right.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2z & 3 \\ -3z & 5 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-10z + 9z}{7} = \frac{-1}{7}z,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2z \\ 1 & -3z \end{vmatrix}}{7} = \frac{-6z + 2z}{7} = \frac{-4}{7}z.$$

Luego, la solución es $\left(\frac{-1}{7}z, \ \frac{-4}{7}z, \ z\right)$.

——— ∞ ———

Problema 3.24. Estudia si el siguiente sistema admite soluciones distintas de la trivial y resuélvelo en caso afirmativo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 7x + 19y - z = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

Solución.

Estudiando el rango de la matriz asociada A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 19 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 19 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -19 + 105 - 4 - 114 + 5 + 14 = -13 \neq 0,$$

entonces $rg\,A = 3$ que es igual al número de incógnitas, por tanto, el sistema solo admite la solución trivial $(0,\ 0,\ 0)$.

——— ∞ ———

Problema 3.25. Dada la expresión:

$$x \cdot (2a + b + 3c) + y \cdot (3a - b + 7c) + z \cdot (-a + b - 3c)$$

¿Existe alguna terna de valores x, y, z distintas de $(0, 0, 0)$ que haga idénticamente nula a dicha expresión?

Solución.

Sacando a, b y c factor común, queda:

$$a \cdot (2x + 3y - z) + b \cdot (x - y + z) + c \cdot (3x - 7y - 3z) = 0.$$

Los coeficientes a, b y c, pueden ser cualesquiera, pues la condición que pide el problema se refiere a x, y, z.

Por tanto, el sistema

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 7y - 3z = 0 \end{array}\right.$$

debe admitir solución distinta de la trivial, lo que significa que el determinante de la matriz asociada A debe ser 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 9 - 7 - 3 - 14 + 9 = 0.$$

Luego existen soluciones distintas de la trivial y por tanto existen ternas de valores x, y, z distintas de $(0, 0, 0)$ que hacen idénticamente nula dicha expresión.

——— ∞ ———

Problema 3.26. Resuelve el sistema siguiente:

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + 8z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{array}\right.$$

Solución.

Se trata de un sistema homogéneo, por tanto, tendrá como mínimo la solución trivial $(0, 0, 0)$.

Para saber si existen más soluciones se estudia el rango de la matriz asociada:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

y como $|A| \neq 0$, entonces $rgA = 3$, luego, no existen soluciones distintas de la trivial.

——— ∞ ———

Problema 3.27. Discute el siguiente sistema según los valores de $\lambda \in \mathbb{Z}$ y resuélvelo cuando el sistema sea compatible:

$$\begin{cases} \lambda x + 9y = 25 \\ 5x + \lambda y = 19 \\ 3x + 2y = \lambda \end{cases}$$

Solución.

Es un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas, luego $rgA \leq 2$.

Estudiando el rango de la matriz ampliada:

$$rgB = rg\begin{pmatrix} \lambda & 9 & 25 \\ 5 & \lambda & 19 \\ 3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 9 & 25 \\ 5 & \lambda & 19 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 250 + 513 - 75\lambda - 45\lambda - 38\lambda$$

$$= \lambda^3 - 158\lambda + 763.$$

$$|B| = 0 \Longleftrightarrow \lambda^3 - 158\lambda + 763 = 0,$$

$$(\lambda - 7)(\lambda^2 + 7\lambda - 109) = 0.$$

El único $\lambda \in \mathbb{Z}$ es $\lambda = 7$. Luego, se tienen los siguientes casos:

- Si $\lambda \neq 7$, $rgA = 2 < rgB = 3$ y es un sistema incompatible.
- Si $\lambda = 7$, $rgA = rgB = 2$ y es un sistema compatible determinado. Resolviendo por Cramer, a partir de las ecuaciones 2 y 3:

$$\begin{cases} 5x + 7y = 19 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 19 & 7 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}{-11} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{-11} = 2.$$

Luego, la solución, cuando $\lambda = 7$, es $(1,\ 2)$.

—— ∞ ——

Problema 3.28. Discute el siguiente sistema según los valores de λ y resuélvelo cuando sea un sistema compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{r} \lambda x + 5y - \lambda z = 16 \\ 4x + \lambda y + z = 19 \\ x + 9y - 11z = 10 \end{array}\right.$$

Solución.

Estudiando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 5 & -\lambda \\ 4 & \lambda & 1 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = -11\lambda^2 - 36\lambda + 5 + \lambda^2 - 9\lambda + 220$$

$$= -10\lambda^2 - 45\lambda + 225.$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow -10\lambda^2 - 45\lambda + 225 = 0,$$

$$2\lambda^2 + 9\lambda - 45 = 0,$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + \frac{15}{2}) = 0.$$

- Si $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -\frac{15}{2}$, entonces $rgA = rgB = 3$ y se trata de un sistema compatible determinado, con solución única para cada valor de λ.

- Si $\lambda = 3$, $rgA \leq 2$

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2,$$

$$rgB = rg\begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 & 16 \\ 4 & 3 & 1 & 19 \\ 1 & 9 & -11 & 10 \end{pmatrix}$$

Se analizan los posibles menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 16 \\ 3 & 1 & 19 \\ 9 & -11 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 16 \\ 4 & 1 & 19 \\ 1 & -11 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 16 \\ 4 & 3 & 19 \\ 1 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

y como $rgA = rgB = 2 < n = 3$, se trata de un sistema compatible indeterminado, y se resuelve por Cramer:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y = 16 + 3z \\ 4x + 3y = 19 - z \end{array} \right.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 16 + 3z & 5 \\ 19 - z & 3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-47 + 14z}{-11},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 16 + 3z \\ 4 & 19 - z \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-7 - 15z}{-11}.$$

Luego, la solución es $\left(\dfrac{47 - 14z}{11}, \dfrac{7 + 15z}{11}, z\right)$.

- Si $\lambda = -\dfrac{15}{2}$, $rgA \leq 2$

$$rgA = rg\begin{pmatrix} -15/2 & 5 \\ 4 & -15/2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$rgB = rg\begin{pmatrix} -15/2 & 5 & 16 \\ 4 & -15/2 & 19 \\ 1 & 9 & 10 \end{pmatrix} = 3,$$

y, como $rgA = 2 < rgB = 3$, se trata de un sistema incompatible.

—— ∞ ——

Problema 3.29. Discute el siguiente sistema según los valores de λ y resuélvelo en caso de soluciones distintas de la trivial:

$$\left\{ \begin{array}{r} 3x_1 + \lambda x_2 - 13x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ 6x_1 - 8x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Solución.

Es un sistema homogéneo de 3 ecuaciones y 3 incógnitas y con un único parámetro λ.

Para que existan soluciones distintas de la trivial, el rango de la matriz asociada, A, debe ser menor que el número de incógnitas, por tanto, debe cumplirse que $rgA \leq 2$.

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 3 & \lambda & -13 \\ 1 & 2 & -7 \\ 6 & -8 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & \lambda & -13 \\ 1 & 2 & -7 \\ 6 & -8 & -\lambda \end{vmatrix} = -6\lambda + 104 - 42\lambda + 156 - 168 + \lambda^2$$

$$= \lambda^2 - 48\lambda + 92.$$

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 48\lambda + 92 = 0.$$

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 46) = 0.$$

Luego, el sistema tiene solución distinta de la trivial si $\lambda = 2$ o $\lambda = 46$.

- Si $\lambda = 2$, trabajando con las ecuaciones segunda y tercera:

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 7x_3 \\ 6x_1 - 8x_2 = 2x_3 \end{array} \right.$$

se comprueba que el rango de la matriz asociada es 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -20 \neq 0,$$

y se puede resolver por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7x_3 & 2 \\ 2x_3 & -8 \end{vmatrix}}{-20} = 3x_3,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7x_3 \\ 6 & 2x_3 \end{vmatrix}}{-20} = 2x_3.$$

Luego, la solución, cuando $\lambda = 2$, es $(3x_3,\ 2x_3,\ x_3)$.

- Si $\lambda = 46$, trabajando con las ecuaciones primera y segunda:

$$\left\{ \begin{array}{r} 3x_1 + 46x_2 = 13x_3 \\ x_1 + 2x_2 = 7x_3 \end{array} \right.$$

se comprueba que el rango de la matriz asociada es 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 46 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -40 \neq 0,$$

y se puede resolver por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13x_3 & 46 \\ 7x_3 & 2 \end{vmatrix}}{-40} = \frac{37}{5}x_3,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13x_3 \\ 1 & 7x_3 \end{vmatrix}}{-40} = -\frac{1}{5}x_3.$$

Luego, la solución, cuando $\lambda = 46$, es:

$$\left(\frac{37}{5}x_3,\ -\frac{1}{5}x_3,\ x_3\right).$$

——— ∞ ———

Problema 3.30. Estudia la compatibilidad del sistema siguiente, en función de los valores de λ:

$$\begin{cases} x + 2y + \lambda z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$$

Solución.

Se estudian los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 3\lambda - \lambda - 6 - 8 = 2\lambda - 6,$$

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow 2\lambda - 6 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 3.$$

- Si $\lambda \neq 3$, entonces $rgA = rgB = 3$ y es un sistema compatible determinado, resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{2\lambda - 6} = \frac{2\lambda - 6}{2\lambda - 6} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & \lambda \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{2\lambda - 6} = \frac{2\lambda - 6}{2\lambda - 6} = 1,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{2\lambda - 6} = \frac{0}{2\lambda - 6} = 0.$$

Luego, la solución es (1, 1, 0).

- Si $\lambda = 3$, $rgA \leq 2$

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$rgB = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Como la cuarta columna es igual a la tercera, se elimina y la matriz resultante es igual a A.

Luego, $rgA = rgB = 2 < n = 3$ y es un sistema compatible indeterminado y resolviendo por Cramer:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 - 3z \\ x + y = 2 - 2z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - 3z & 2 \\ 2 - 2z & 1 \end{vmatrix}}{-1} = 1 - z,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - 3z \\ 1 & 2 - 2z \end{vmatrix}}{-1} = 1 - z.$$

Luego, la solución es $(1 - z,\ 1 - z,\ z)$.

——— ∞ ———

Problema 3.31. Estudia la compatibilidad del sistema siguiente, en función de los valores de λ:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+\lambda z=0 \\ x+y+2z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{array}\right.$$

Solución.

Se trata de un sistema homogéneo, por tanto, tendrá como mínimo la solución trivial $(0,0,0)$.

Para saber si existen más soluciones se estudia el rango de la matriz asociada:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \lambda - 2.$$

- Si $\lambda \neq 2$, entonces $rgA = rgB = 3 = n$ y solo admite la solución trivial.
- Si $\lambda = 2$, entonces $rgA = rgB = 2 < n$ y existen soluciones distintas de la trivial,

  $$\left\{\begin{array}{c} x+2y=-2z \\ x+y=-2z \end{array}\right.$$

  y restando una ecuación de la otra se obtiene:

  $$y=0,$$

  y sustituyendo en cualquiera de ellas:

  $$x=-2z.$$

  Luego la solución es $(-2z,\ 0,\ z)$.

——— ∞ ———

Problema 3.32. Discute el siguiente sistema según los valores de a, b y c:

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{array}\right.$$

Solución.

Se estudian los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, $rgA = 2$, y

$$rgB = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array}\right)$$

los posibles menores de orden 3 son:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -3 \\ b & 6 & -11 \\ c & -2 & 7 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-5a+2b+c),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -3 \\ 2 & b & -11 \\ 1 & c & 7 \end{vmatrix} = 5\cdot(-5a+2b+c),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 6 & b \\ 1 & -2 & c \end{vmatrix} = 2\cdot(-5a+2b+c).$$

- Si $-5a+2b+c=0$, entonces

$$rgA = rgB = 2,$$

y es un sistema compatible indeterminado.

- Si $-5a+2b+c \neq 0$, entonces

$$rgA = 2 < 3 = rgB,$$

y es un sistema incompatible.

—— ∞ ——

Problema 3.33. Dado el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} (1-\lambda)\,x + (2\lambda+1)\,y + (2\lambda+2)\,z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y = 2\lambda + 2 \\ 2x + (\lambda+1)\,y + (\lambda-1)\,z = \lambda^2 - 2\lambda + 9 \end{cases}$$

a) Estudia su compatibilidad según los distintos valores de λ.

b) Resuélvelo para el caso de sistema compatible indeterminado.

Solución.

a) Estudiando el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda+1 & 2\lambda+2 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2\lambda+1 & 2\lambda+2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 0 & 2\lambda+2 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+9 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2\lambda+1 & 2\lambda+2 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 2 & \lambda+1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 3\lambda & 2\lambda+2 \\ \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\,(\lambda-1)\,(3\lambda-2\lambda-2) = -\lambda\,(\lambda-1)\,(\lambda-2)\,.$$

De modo que

- Si $\lambda \neq 0,\ 1,\ 2 \Rightarrow rgA = 3 \Rightarrow$ es un sistema compatible determinado.
- Si $\lambda = 1 \Rightarrow rgA < 3$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Como la 3^{a} fila es el doble de la 2^{a}, el rango máximo es 2 y por tanto el sistema es compatible indeterminado.

- Si $\lambda = 0 \Rightarrow rgA < 3$

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$rgB = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} = 3$$

Es decir, $rgA \neq rgB$ y, por tanto, es un sistema incompatible.

- Si $\lambda = 2 \Rightarrow rgA < 3$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$$rgA = rg\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$rgB = rg\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 13 & 13 \end{pmatrix} = 3,$$

y, por tanto, es un sistema incompatible.

b) Corresponde al caso

$$\lambda = 1$$

y el sistema que se ha de resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{r} 3y + 4z = 1 \\ x + y = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \dfrac{1 - 3y}{4} \\ x = 4 - y \end{array} \right.$$

Luego, la solución viene dada por

$$\left(4 - t, t, \frac{1 - 3t}{4}\right).$$

——— ∞ ———

Problema 3.34. Discute y resuelve cuando sea posible el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{r} x + ky + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{array} \right.$$

Solución.

Se trata de un sistema homogéneo, por tanto, tendrá como mínimo la solución trivial $(0,0,0)$.

Para saber si existen más soluciones se estudia el rango de la matriz asociada:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$= (k-1)\begin{vmatrix} 1 & k-1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(k-1)^2$$

- Si $k \neq 1$, entonces $rgA = rgB = 3 = n$ y solo admite la solución trivial.
- Si $k = 1$, entonces $rgA = rgB = 1 < n = 3$, y es un sistema compatible indeterminado con 2 grados de libertad,

  $$x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z.$$

  Luego, la solución es $(-y-z,\ y,\ z)$.

——— ∞ ———

Problema 3.35. Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 5x + 3z = 7 \\ x - y + 2z = 3 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

Solución.

Se estudian los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$rgA = rg\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix} = 3 - 7k.$$

- Si $k \neq \frac{3}{7}$, $rgA = rgB = 3 = n$ es un sistema compatible determinado, y resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix}}{3-7k} = \frac{3-5k}{3-7k},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3-7k} = \frac{-2}{3-7k},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{3-7k} = \frac{2-8k}{3-7k}.$$

Luego, la solución es $\left(\frac{3-5k}{3-7k}, \frac{-2}{3-7k}, \frac{2-8k}{3-7k}\right)$.

- Si $k = \frac{3}{7}$, $rgA = 2$,

$$rgB = rg\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3/7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y como

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

se tiene que $rgA = 2 \neq 3 = rgB$, luego es un sistema incompatible.

——— ∞ ———

Problema 3.36. Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de m:

$$\left\{ \begin{array}{l} mx + y = 2 \\ 4x + my = 4 + m \end{array} \right.$$

Solución.

Se estudian los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$rgA = rg\begin{pmatrix} m & 1 \\ 4 & m \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 4 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m+2)(m-2).$$

Luego,

- Si $m \neq 2$ y $m \neq -2$, $rgA = rgB = 2 = n$ es un sistema compatible determinado, y resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4+m & m \end{vmatrix}}{(m+2)(m-2)} = \frac{m-4}{(m+2)(m-2)},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2 \\ 4 & 4+m \end{vmatrix}}{(m+2)(m-2)} = \frac{m^2+4m-8}{(m+2)(m-2)}.$$

- Si $m = 2$, $rgA = 1$,

$$rgB = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 2,$$

luego, $rgA = 1 \neq rgB = 2 = n$ es un sistema incompatible.

- Si $m = -2$, $rgA = 1$,

$$rgB = rg\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

luego, $rgA = 1 \neq rgB = 2 = n$ es un sistema incompatible.

——— ∞ ———

Problema 3.37. Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de m:

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Solución.

Se estudian los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada. Para ello se calcula el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5m - 1 \Longleftrightarrow m = \frac{-1}{5}.$$

- Si $m \neq \dfrac{-1}{5}$,

$$rgA = rgB = 3 = n$$

el sistema es compatible determinado, resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-5m-1} = \frac{1}{5m+1},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-5m-1} = \frac{2m-4}{5m+1},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-5m-1} = \frac{3(2m-1)}{5m+1}.$$

Luego, la solución es

$$\left(\frac{1}{5m+1}, \frac{2m-4}{5m+1}, \frac{3(2m-1)}{5m+1}\right).$$

- Si $m = \dfrac{-1}{5}$

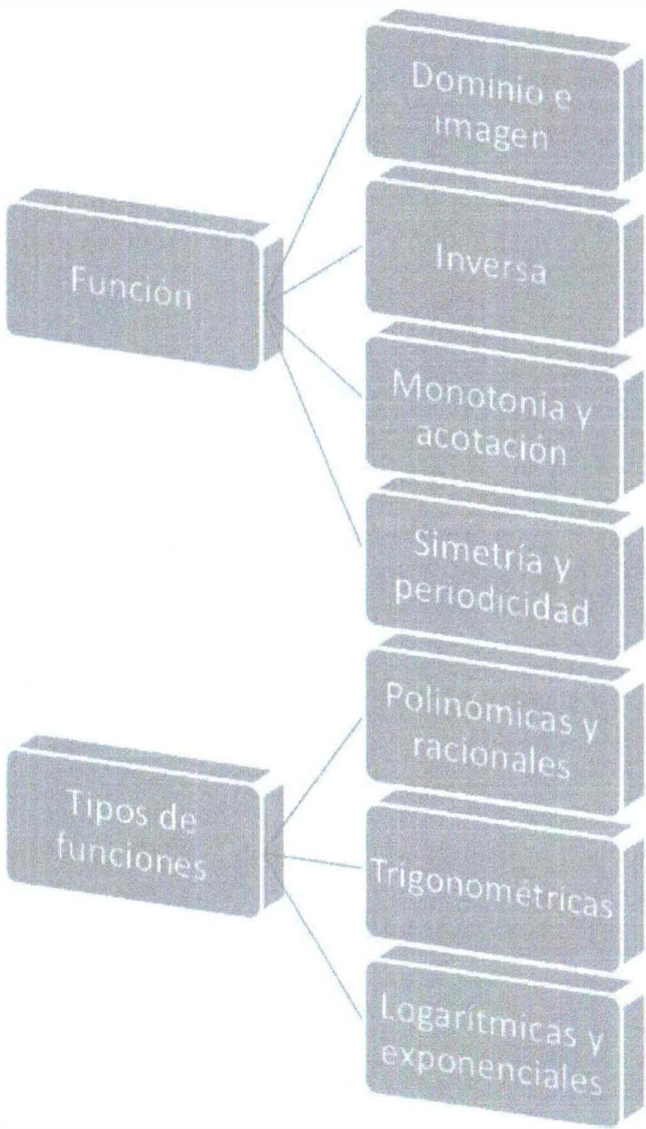
$$rg = rg \begin{pmatrix} -1/5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1/5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Luego, $rgA = 2 \neq rgB = 3$ es un sistema incompatible.

——— ∞ ———

Capítulo 4

FUNCIONES



Problema 4.1. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 7 + 5x^3 - x^2$ b) $f(x) = -\sqrt{x}$

c) $f(x) = \ln(x+2), \forall x \in \{0,3,5\}$

Solución.

a) $f(x) = 7 + 5x^3 - x^2$

El dominio son todos los números reales, ya que se trata de un polinomio.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

b) $f(x) = -\sqrt{x}$

El dominio de una función radical de índice par son todos los números reales positivos y el 0, es decir, $x \geqslant 0$. Luego en este caso se tiene:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

c) $f(x) = \ln(x+2), \forall x \in \{0,3,5\}$

El dominio de una función logarítmica son los reales positivos, luego en este caso el dominio vendrá dado por los puntos que verifiquen

$$x + 2 > 0$$

que es válido para todos los puntos del conjunto original, que en este caso es explícito, luego

$$\text{Dom}(f) = \{0,3,5\}.$$

——— ∞ ———

Problema 4.2. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{2x-3}{(x^2-1)}$

c) $f(x) = \dfrac{2-3x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

El dominio en una función racional es $\mathbb{R}$ menos los valores que anulan el denominador, luego en este caso se tiene:

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}\,.$$

b) $f\,(x) = \dfrac{2x-3}{(x^2-1)}$

El dominio en una función racional son todos los números reales, excepto aquellos que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1.$$

Por tanto:

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}\,.$$

c) $f\,(x) = \dfrac{2-3x}{x^3-2x^2-5x+6}$

El dominio son todos los números reales, excepto aquellos que anulan el denominador. En este caso se aplica Ruffini para determinar las raíces del denominador:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \\ 3 & & 3 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

Por tanto:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)\,(x-3)(x+2)\,,$$

es decir:

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}\backslash\{-2,1,3\}\,.$$

——— ∞ ———

Problema 4.3. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+2}}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-6}{x^2-4}}$; d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-5}}{x^2-1}$

Solución.

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+2}}$

Al tratarse de una raíz cuadrada, el radicando tiene que ser mayor o igual que 0:

$$\frac{x-2}{x^2+2} \geq 0.$$

Además, como hay una fracción, se ha de cumplir que el denominador ha de ser no nulo. En este caso se comprueba que el denominador es siempre mayor que 0:

$$x^2 + 2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego, la condición que ha de cumplirse es:

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

y, por tanto, el dominio viene dado por:

$$\text{Dom}\,(f) = [2, +\infty).$$

b) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

El dominio, al tratarse de una raíz cuadrada, son todos los números reales para los que se cumple que $x^2 - 9 \geq 0$, luego

$$x^2 - 9 \geq 0 \Longleftrightarrow (x-3)(x+3) \geq 0.$$

Se hace un estudio de los signos de la función, para ello se construye una tabla en la que aparecen, por un lado las expresiones y, por otro, los intervalos donde cambia el signo, que se obtienen a partir de los valores que anulan los binomios, $x-3$ y $x+3$ y que en este caso son -3 y 3 .

	$x+3$	$x-3$	$(x+3)(x-3)$
$(-\infty,-3)$	$-$	$-$	$+$
$(-3,3)$	$+$	$-$	$-$
$(3,\infty)$	$+$	$+$	$+$

Los valores 3 y -3 pertenecen al dominio, pues la función en ese punto puede calcularse y vale 0.

Luego el dominio es:

$$\text{Dom}\,(f) = (-\infty,-3] \cup [3,+\infty),$$

que se puede escribir como:

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}\backslash(-3,3).$$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-6}{x^2-4}}$

Al tratarse de una raíz cuadrada, debe cumplir que:

$$\frac{2x-6}{(x^2-4)} \geq 0.$$

Además, como hay una fracción, se ha de cumplir que:

$$x^2 - 4 \neq 0.$$

Para estudiar los signos de la función

$$\frac{2x-6}{(x^2-4)} = \frac{2(x-3)}{(x-2)(x+2)},$$

se construye una tabla en la que aparecen, por un lado, los monomios $(x+2)$, $(x-2)$ y $(x-3)$ y, por otro, los intervalos donde cambia el signo, que en este caso son, -2, 2 y 3.

	$x+2$	$x-2$	$x-3$	$(x-3)/(x^2-4)$
$(-\infty,-2)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(-2,2)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(2,3)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(3,+\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

El valor 3 pertenece al dominio, pues la función existe en ese punto y vale 0.

Los valores -2 y 2 no pertenecen al dominio, pues anulan el denominador.

Luego el dominio es:

$$\text{Dom}\,(f) = (-2, 2) \cup [3, +\infty).$$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-5}}{x^2-1}$

Es un cociente, luego el denominador tiene que ser distinto de 0,

$$x^2 - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0.$$

Por tanto, los valores -1 y 1 no están en el dominio.

El numerador es una raíz de índice impar (3), luego está definida para todos los números reales.

Así pues, el dominio es:

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}.$$

——— ∞ ———

Problema 4.4. Halla el dominio de la función:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{x^2-1}\right)$$

Solución.

Los logaritmos solo están definidos para valores positivos, luego el dominio vendrá dado por los puntos que verifiquen:

$$\frac{2x-3}{x^2-1} > 0.$$

Además, como hay una fracción, se ha de cumplir que:

$$x^2 - 1 \neq 0.$$

Para estudiar los signos de la función

$$\frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{2x-3}{(x-1)(x+1)},$$

se construye una tabla en la que aparecen, por un lado, los binomios y, por otro, los intervalos donde cambia el signo.

	$x-1$	$x+1$	$2x-3$	$(2x-3)/(x^2-1)$
$(-\infty,-1)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(-1,1)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$(1,3/2)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(3/2,+\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

El valor $3/2$ no pertenece al dominio, pues anula el numerador y la función no está definida en 0.

Los valores -1 y 1 no pertenecen al dominio, pues anulan el denominador.

Luego el dominio es:

$$\text{Dom}\,(f) = (-1,1) \cup (3/2,+\infty).$$

——— ∞ ———

Problema 4.5. Halla el dominio de la función:

$$f\,(x) = \begin{cases} -x^2+6 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x+2 & \text{si } 2 < x \leq 6 \\ (x-4)^3 & \text{si } 6 < x \leq 20 \end{cases}$$

Solución.

La función está definida en tres intervalos distintos y en cada uno de ellos la expresión de la función es un polinomio, luego está definida en todos los puntos del intervalo respectivo.

Así pues, el dominio es:

$$\text{Dom}\,(f) = (-2,2] \cup (2,6] \cup (6,20] = (-2,20].$$

——— ∞ ———

Problema 4.6. Halla la imagen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^5$ **b)** $f(x) = -\sqrt{x}$ **c)** $f(x) = \ln(x+2)$, $\forall x \in \{0,3,5\}$

Solución.

a) $f(x) = x^5$

La imagen son todos los números reales, $Im(f) = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = -\sqrt{x}$

La imagen son todos los números reales negativos y el 0,

$$Im(f) = \mathbb{R}^- \cup \{0\}.$$

c) $f(x) = \ln(x+2)$, $\forall x \in \{0, 3, 5\}$

En este caso el dominio de la función viene explicitado, luego la imagen son aquellos valores devueltos por la función al ser evaluada en los valores del dominio, y son:

$$Im(f) = \{\ln(2), \ln(5), \ln(7)\}.$$

——— ∞ ———

Problema 4.7. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones a trozos:

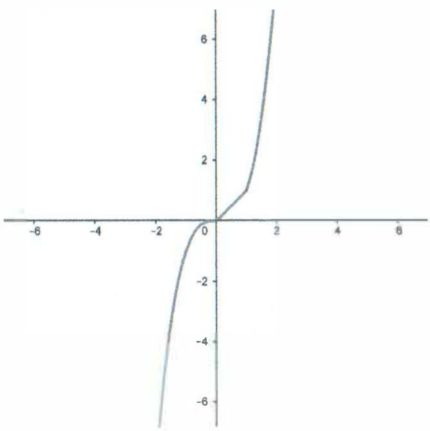
a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \forall x \in (-\infty, 0) \\ x & \forall x \in [0, 1] \\ x^3 & \forall x \in (1, \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \forall x \in (-\infty, 0) \\ -x+1 & \forall x \in [0, \infty) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \forall x \in (-\infty, 0) \\ -x^3 & \forall x \in [1, \infty) \end{cases}$

Solución.

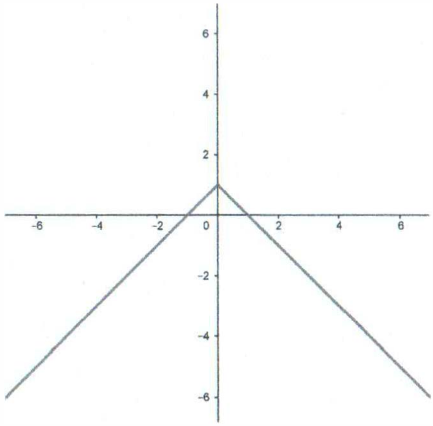
a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \forall x \in (-\infty, 0) \\ x & \forall x \in [0, 1] \\ x^3 & \forall x \in (1, \infty) \end{cases}$

Figura 4.1: Funciones a trozos (I)



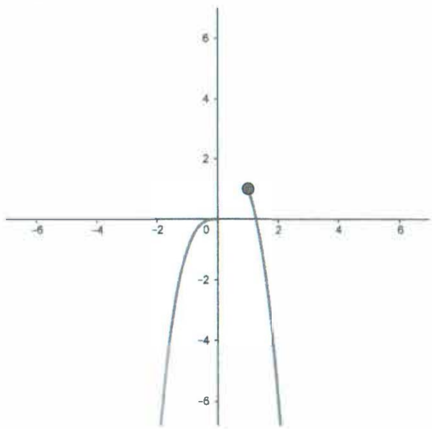
b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \forall x \in (-\infty, 0) \\ -x+1 & \forall x \in [0, \infty) \end{cases}$

Figura 4.2: Funciones a trozos (II)



c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \forall x \in (-\infty, 0) \\ -x^3 & \forall x \in [1, \infty) \end{cases}$

Figura 4.3: Funciones a trozos (III)



——— ∞ ———

Problema 4.8. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = x + 3$, halla las siguientes operaciones de funciones:

a) $(f+g)(x)$ **b)** $(f-g)(x)$ **c)** $(g-f)(x)$ **d)** $(f \cdot g)(x)$

Solución.

a)$(f+g)(x)$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\left(x^2+2x+1\right)+(x+3)$$
$$=x^2+2x+1+x+3=x^2+3x+4.$$

b)$(f-g)(x)$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\left(x^2+2x+1\right)-(x+3)$$
$$=x^2+2x+1-x-3=x^2+x-2.$$

c)$(g-f)(x)$

$$(g-f)(x)=g(x)-f(x)=(x+3)-\left(x^2+2x+1\right)$$
$$=x+3-x^2-2x-1=-x^2-x+2.$$

d)$(f\cdot g)(x)$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(x^2+2x+1\right)\cdot(x+3)$$
$$=\left(x^2+2x+1\right)\cdot x+\left(x^2+2x+1\right)\cdot 3$$
$$=x^3+2x^2+x+3x^2+6x+3=x^3+5x^2+7x+3.$$

——— ∞ ———

Problema 4.9. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$ y $g(x)=\dfrac{3}{x^2-4}$, halla las siguientes operaciones de funciones:

a) $(f+g)(x)$ **b)** $(f-g)(x)$ **c)** $(3g-2f)(x)$ **d)** $(2f\cdot 3g)(x)$

Solución.

a) $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x)=\frac{4}{x-2}+\frac{3}{x^2-4}=\frac{4(x+2)+3}{x^2-4}=\frac{4x+11}{x^2-4}.$$

b) $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x)=\frac{4}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}=\frac{4(x+2)-3}{x^2-4}=\frac{4x+5}{x^2-4}.$$

c) $(3g - 2f)(x)$

$$(3g - 2f)(x) = 3\frac{3}{x^2 - 4} - 2\frac{4}{x - 2} = \frac{9 - 8(x + 2)}{x^2 - 4} = \frac{-8x - 7}{x^2 - 4}.$$

d) $(2f \cdot 3g)(x)$

$$(2f \cdot 3g)(x) = \frac{8}{x - 2} \cdot \frac{9}{x^2 - 4} = \frac{72}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}.$$

——— ∞ ———

Problema 4.10. Dadas las funciones f y g, halla $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

a) $f(x) = x^3$ y $g(x) = x - 2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{senx}$ y $g(x) = e^{x+1}$

c) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ y $g(x) = \ln(x + 5)$

Solución.

a) $f(x) = x^3$ y $g(x) = x - 2$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = x^3 - 2.$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x - 2) = (x - 2)^3 \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8.\end{aligned}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{senx}$, $g(x) = e^{x+1}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{sen(g(x))} = \frac{1}{sen(e^{x+1})}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)+1} = e^{\frac{1}{senx}+1}.$$

c) $f(x) = x^3 + 2x + 1$, $g(x) = \ln(x + 5)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = [g(x)]^3 + 2g(x) + 1 \\ &= [\ln(x + 5)]^3 + 2\ln(x + 5) + 1 \\ &= \ln^3(x + 5) + 2\ln(x + 5) + 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \ln(f(x) + 5) \\ &= \ln(x^3 + 2x + 1 + 5) = \ln(x^3 + 2x + 6).\end{aligned}$$

——— ∞ ———

Problema 4.11. Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^3 - 7$ b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ c) $f(x) = \ln x^2$

Nota: Considera solo las raíces positivas.

Solución.

a) $f(x) = 3x^3 - 7$

Por ser un polinomio con exponentes impares la función es inyectiva y está definida para todos los números reales, en consecuencia, su correspondencia recíproca es una función. Siguiendo el método para hallar la función inversa se dan los siguientes pasos:

i) Escribir la expresión a invertir en función de la variable y

$$y = 3x^3 - 7.$$

ii) Intercambiar y por x

$$x = 3y^3 - 7.$$

iii) Despejar la y

$$x = 3y^3 - 7,$$

$$x + 7 = 3y^3,$$

$$y^3 = \frac{x+7}{3},$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x+7}{3}}.$$

iv) Cambiar la y por f^{-1}, y ya se tiene la función inversa buscada. Véase Figura 4.4 a).

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+7}{3}}.$$

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

Por ser un polinomio con exponentes impares la función es inyectiva y está definida para todos los números reales excepto para $x = 1$. Siguiendo el método para hallar la función inversa se dan los siguientes pasos:

i) Escribir la expresión a invertir en función de la variable y

$$y = \frac{2x+3}{x-1}.$$

ii) Intercambiar y por x

$$x = \frac{2y+3}{y-1}.$$

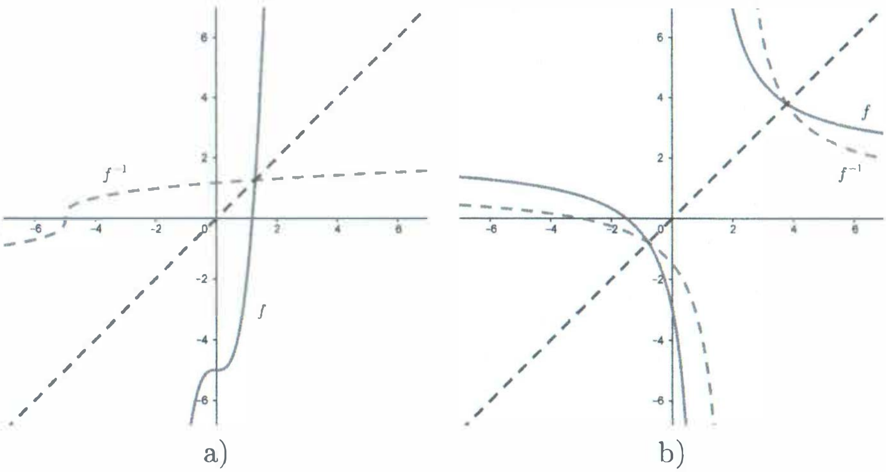
iii) Despejar la y

$$x(y-1) = 2y+3,$$
$$xy - x = 2y+3,$$
$$xy - 2y = 3+x,$$
$$y(x-2) = 3+x,$$
$$y = \frac{3+x}{x-2}.$$

iv) Cambiar la y por f^{-1} y ya se tiene la función inversa buscada. Véase Figura 4.4 b).

$$f^{-1}(x) = \frac{3+x}{x-2}.$$

Figura 4.4: Funciones inversas (I)



c) $f(x) = \ln x^2$

i) Escribir la expresión a invertir en función de la variable y

$$y = \ln x^2$$

ii) Intercambiar y por x

$$x = \ln y^2$$

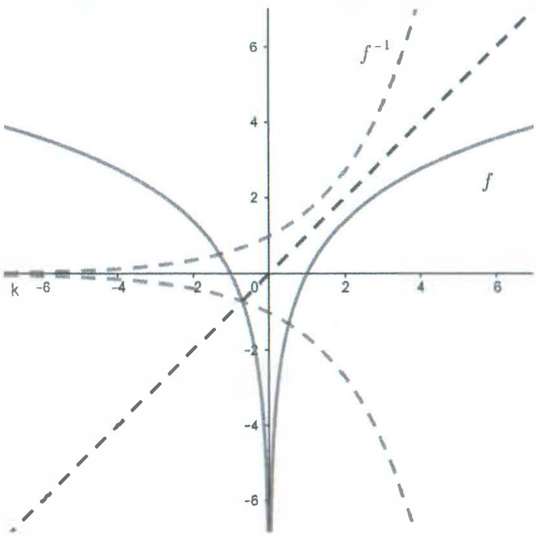
iii) Despejar la y

$$x = \ln y^2 \Rightarrow e^x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{e^x}$$

iv) Cambiar la y por f^{-1} y ya se tiene la función inversa buscada. Véase Figura 4.5.

$$f^{-1}(x) = \sqrt{e^x}.$$

Figura 4.5: Funciones inversas (II)



——— ∞ ———

Problema 4.12. Halla $f^{-1}(x)$ para las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^5 + 3$ b) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-1}\right)$ d) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x} + 1$

Nota: Considera solo las raíces positivas.

Solución.

Para resolver cada uno de los ejercicios, se aplica el mismo el procedimiento indicado en el ejercicio anterior.

a) $f(x) = 3x^5 + 3$

i) $y = 3x^5 + 3$.

ii) $x = 3y^5 + 3$.

iii) Despejando la y:

$$x - 3 = 3y^5 \Rightarrow y^5 = \frac{x-3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[5]{\frac{x-3}{3}}.$$

iv) $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x-3}{3}}$.

b) $f(x) = \sqrt{2x-4}$

i) $y = \sqrt{2x-4}$.

ii) $x = \sqrt{2y-4}$.

iii) Despejando la y

$$x = \sqrt{2y-4} \Rightarrow x^2 = 2y - 4 \Rightarrow y = \frac{x^2+4}{2}.$$

iv) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+4}{2}$.

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-1}\right)$

Nota: Considera solo las raíces positivas.

i) $y = \ln\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-1}\right)$.

ii) $x = \ln\left(\dfrac{y^2+3}{y^2-1}\right)$.

iii) Despejando la y

$$x = \ln\left(\frac{y^2+3}{y^2-1}\right) \Rightarrow e^x = \frac{y^2+3}{y^2-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^x(y^2-1) = y^2+3 \Rightarrow e^x y^2 - y^2 = 3 + e^x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2(e^x-1) = 3+e^x \Rightarrow y^2 = \frac{3+e^x}{e^x-1} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{3+e^x}{e^x-1}}.$$

iv) $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{3+e^x}{e^x-1}}.$

d) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x} + 1$

i) Escribir la expresión a invertir en función de la variable y

$$y = \frac{3x^2}{x} + 1.$$

ii) Intercambiar y por x

$$x = \frac{3y^2}{y} + 1.$$

iii) Despejar la y

$$x - 1 = \frac{3y^2}{y} \Rightarrow x - 1 = 3y \Rightarrow y = \frac{x-1}{3}.$$

iv) Cambiar la y por f^{-1} y ya se tiene la función inversa buscada

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}.$$

——— ∞ ———

Problema 4.13. Halla $f^{-1}(x)$ para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x-5}{x+1}$ **c)** $f(x) = e^{(1-x^2)}$

Nota: Considera solo las raíces positivas.

Solución.

Para resolver cada uno de los ejercicios, se aplica el mismo el procedimiento indicado en el ejercicio anterior.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

i) $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$.

ii) $x = \dfrac{1}{y^2 - 9}$.

iii) Despejando la y:

$$x = \frac{1}{y^2 - 9} \Rightarrow y^2 - 9 = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 9 + \frac{1}{x} \Rightarrow y = \sqrt{9 + \frac{1}{x}}.$$

iv) $f^{-1}(x) = \sqrt{9 + \dfrac{1}{x}}$.

b) $f(x) = \dfrac{x - 5}{x + 1}$

i) $y = \dfrac{x - 5}{x + 1}$.

ii) $x = \dfrac{y - 5}{y + 1}$.

iii) Despejando la y:

$$x = \frac{y - 5}{y + 1} \Rightarrow x(y + 1) = y - 5 \Rightarrow xy + x = y - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - yx = x + 5 \Rightarrow y(1 - x) = x + 5 \Rightarrow y = \frac{x + 5}{1 - x}.$$

iv) $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 5}{1 - x}$.

c) $f(x) = e^{(1 - x^2)}$

i) $y = e^{(1 - x^2)}$.

ii) $x = e^{(1 - y^2)}$.

iii) Despejando la y:

$$x = e^{(1 - y^2)} \Rightarrow \ln x = 1 - y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - \ln x \Rightarrow y = \sqrt{1 - \ln x}.$$

iv) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \ln x}$.

——— ∞ ———

Problema 4.14. Comprueba la monotonía de la función $f(x) = x^3 + 7$ en el intervalo $(-\infty, 0)$.

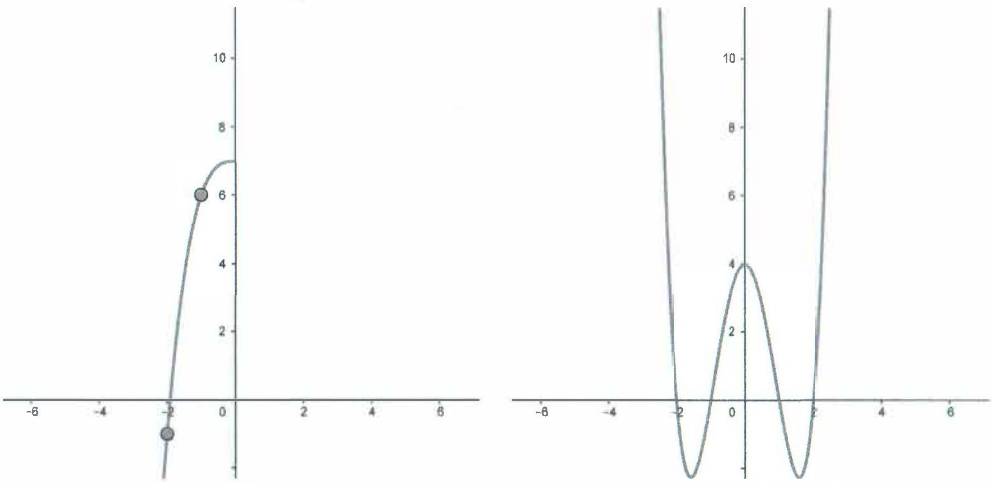
Solución.

Se toman dos valores del intervalo $(-\infty, 0)$, por ejemplo -2 y -1 y se tiene:

$$-2 < -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(-2) = (-2)^3 + 7 = -1 \\ f(-1) = (-1)^3 + 7 = 6 \end{array} \right. \Rightarrow f(-2) < f(-1).$$

Luego aparentemente y para estos dos valores se cumple que la función es estrictamente creciente. Véase Figura 4.6 a).

Figura 4.6: Función monótona



a) $f(x) = x^3 + 7$ b) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

——— ∞ ———

Problema 4.15. Comprueba la monotonía de la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ en los intervalos:

a) $(-\infty, -2)$ **b)** $(-1, 0)$ **c)** $(0, 1)$ **d)** $(2, \infty)$

Solución.

a) $(-\infty, -2)$

Se toman dos valores del intervalo $(-\infty, -2)$, por ejemplo -4 y -3 y se tiene:

$$-4 < -3 \Rightarrow \begin{cases} f(-4) = (-4)^4 - 5(-4)^2 + 4 = 180 \\ f(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 + 4 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -4 < -3 \Rightarrow f(-4) &= (-4)^4 - 5(-4)^2 + 4 = 180 \\ &\geq 40 = (-3)^4 - 5(-3)^2 + 4 = f(-3). \end{aligned}$$

Luego aparentemente y para estos dos valores se cumple que la función es estrictamente decreciente. Véase Figura 4.6 b).

b) $(-1, 0)$

Se toman dos valores del intervalo $(-1, 0)$, por ejemplo $-1/2$ y $-1/4$ y se tiene:

$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^4 - 5\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{45}{16} = 2,8125 \\ f\left(\frac{-1}{4}\right) = \left(\frac{-1}{4}\right)^4 - 5\left(\frac{-1}{4}\right)^2 + 4 = \frac{945}{256} = 3,6914 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2,8125 \leq 3,6914 = f\left(-\frac{1}{4}\right).$$

Luego aparentemente y para estos dos valores se cumple que la función es estrictamente creciente.

c) $(0, 1)$

Se toman dos valores del intervalo $(0, 1)$, por ejemplo $1/4$ y $1/2$ y se tiene:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4 = 3,6914 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = 2,8125 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 3,6914 \geq 2,8125 = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Luego aparentemente y para estos dos valores se cumple que la función es estrictamente decreciente.

d) $(2, \infty)$

Se toman dos valores del intervalo $(2, \infty)$, por ejemplo 3 y 4 y se tiene:

$$3 < 4 \Rightarrow \begin{cases} f(3) = (3)^4 - 5(3)^2 + 4 = 40 \\ f(4) = (4)^4 - 5(4)^2 + 4 = 180 \end{cases} \Rightarrow f(3) \leq f(4).$$

$$3 < 4 \Rightarrow f(3) = 40 \leq 180 = f(4).$$

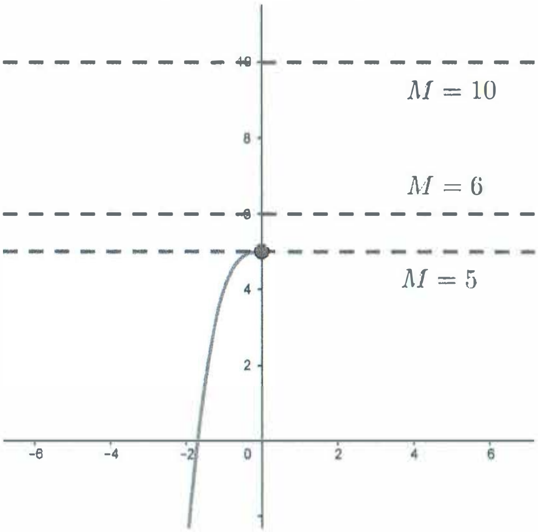
Luego aparentemente y para estos dos valores se cumple que la función es estrictamente creciente.

——— ∞ ———

Problema 4.16. Estudia si la función $f(x) = x^3 + 5$ está acotada en el intervalo $(-\infty, 0)$ y halla, si existen, sus cotas, supremo, máximo, ínfimo y mínimo.

Solución.

Figura 4.7: Función acotada



Función acotada superiormente

La función no está acotada inferiormente, pues no existe un valor $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x)$ para todo $x \in (-\infty, 0)$. Por tanto, no existen el ínfimo ni el mínimo.

En cambio, si que está acotada superiormente, pues existe un valor $M \in \mathbb{R}$, en particular $M = 5$ o $M = 6$ o $M = 10$, de forma que $f(x) \leq M$ para todo $x \in (-\infty, 0)$. Véase Figura 4.7.

A cada uno de los valores M que se pueden tomar se les llama cota superior.

La menor de todas las cotas superiores es $M = 5$, luego esta es el supremo.

Dado que el valor -5 no es alcanzado por la función $f(x)$ en el intervalo no hay máximo. Nótese que $f(0) = 5$ pero $0 \notin (-\infty, 0)$.

——— ∞ ———

Problema 4.17. Estudia si la función $f(x) = x^3 - 5$ está acotada en el intervalo $(1, 3]$ y halla si existen sus cotas, supremo, máximo, ínfimo y mínimo.

Solución.

La función está acotada superiormente, pues existe un valor $M \in \mathbb{R}$, en particular $M = 50$ o $M = 25$ o $M = 22$, tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in (1, 3]$.

A cada uno de los valores M que se pueden tomar se les llama cota superior.

La menor de todas las cotas superiores es $M = 22$, y se denomina supremo.

Dado que el valor 22 es alcanzado por la función en el intervalo ($f(3) = 22$), entonces se denomina máximo de la función.

Por otro lado, la función está acotada inferiormente, pues existe un valor $m \in \mathbb{R}$, en particular $m = -100$ o $m = -10$ o $m = -4$, de forma que $f(x) \geq m$ para todo $x \in (1, 3]$.

La mayor de todas las cotas inferiores es $m = 4$, luego es el ínfimo.

El valor 4 no es alcanzado por la función $f(x)$ en el intervalo ya que $f(1) = 4$ pero $1 \notin (1, 3]$, entonces no hay mínimo.

——— ∞ ———

Problema 4.18. Estudia si las siguientes funciones están acotadas y qué tipo de acotación tienen:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ b) $f(x) = -|x + 3|$

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

La función no está acotada superiormente, pues no existe un valor $M \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in \text{Dom}\ (f)$. Nótese que cuanto más pequeño es el valor absoluto de x, mayor es la expresión $1/x^2$.

En cambio, sí que está acotada inferiormente, pues existe un valor $m \in \mathbb{R}$, en particular $m = -1$ o $m = -5$ o $m = 0$, de forma que $f(x) \geq m$ para todo $x \in \text{Dom}\ (f)$, ya que $1/x^2$ siempre es positivo.

La mayor de todas las cotas inferiores es $m = 0$, luego es el ínfimo.

Dado que el valor 0 no es alcanzado por la función $f(x)$ en el intervalo, entonces no hay mínimo.

b) $f(x) = -|x+3|$

La función está acotada superiormente, pues existe un valor $M \in \mathbb{R}$ en particular $M = 5$, $M = 1$ o $M = 0$, tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in \text{Dom}\ (f)$.

En cambio, no está acotada inferiormente, pues no existe un valor $m \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \geq m$ para todo $x \in \text{Dom}\ (f)$.

La mayor de todas las cotas inferiores es $m = 0$, luego es el ínfimo.

Dado que el valor 0 no es alcanzado por la función $f(x)$ en el intervalo, entonces no hay mínimo.

Como $|x+3|$ siempre es un valor positivo, la función siempre será negativa por lo que tiene una cota superior en 0.

——— ∞ ———

Problema 4.19. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 5x$ b) $f(x) = x^6 - 3x^2 + 1$ c) $f(x) = x^5 + 3x^2 + 2$

Solución.

a) $f(x) = x^3 - 5x$

i) Se halla el valor de $f(-x)$ y se simplifica:

$$f(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -(x^3 - 5x) = -f(x).$$

ii) Y como efectivamente la expresión $f(-x)$ es igual a $-f(x)$, se puede asegurar que $f(x)$ es una función impar.

Como puede observarse en la Figura 4.8 a), la función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

b) $f(x) = x^6 - 3x^2 + 1$

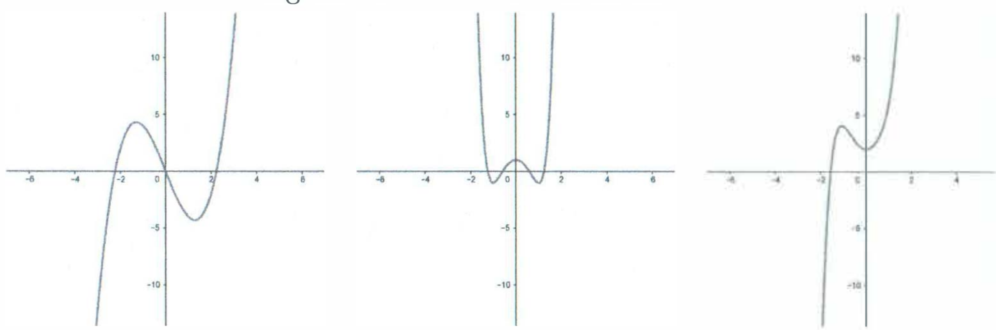
i) Se halla el valor de $f(-x)$ y se simplifica:

$$f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^2 + 1 = x^6 - 3x^2 + 1 = f(x).$$

ii) La expresión hallada es igual a $f(x)$, luego la función $f(x)$ es par.

Como puede observarse en la Figura 4.8 b), la función es simétrica respecto del eje OY.

Figura 4.8: Funciones simétricas



a) Función impar $f(x) = x^3 - 5x$ b) Función par $f(x) = x^6 - 3x^2 + 1$ c) Sin paridad $f(x) = x^5 + 3x^2 + 2$

c) $f(x) = x^5 + 3x^2 + 2$

i) Se halla el valor de $f(-x)$ y se simplifica:

$$f(-x) = (-x)^5 + 3(-x)^2 + 2 = -x^5 + 3x^2 + 2.$$

ii) La expresión hallada no es igual a $f(x)$, luego la función $f(x)$ no es par.

iii) La expresión hallada no es igual a $-f(x)$, luego la función $f(x)$ no es impar.

iv) Si la expresión hallada no es igual a $f(x)$, ni a $-f(x)$, entonces la función no tiene paridad.

Y tal como se muestra en la Figura 4.8 c), la función no es simétrica respecto del eje OY, ni respecto del origen de coordenadas.

—— ∞ ——

Problema 4.20. Estudia la paridad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 1$ b) $f(x) = |x|$

Solución.

a) $f(x) = -x^2 + 1$

i) Halla el valor de $f(-x)$

$$f(-x) = -(-x)^2 + 1 = -x^2 + 1 = f(x)$$

ii) Como $f(-x) = f(x)$, se trata de una función par.

b) $f(x) = |x|$

i) Halla el valor de $f(-x)$

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

ii) Como $f(-x) = f(x)$, se trata de una función par.

—— ∞ ——

Problema 4.21. Halla el periodo, la amplitud y la frecuencia de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $f(x) = 3\cos(x)$ b) $f(x) = 4\cos(2x)$ c) $f(x) = 6\cos(4x + 2)$

Solución.

Son funciones del tipo $f(x) = k\cos(ax + b)$, $a > 0$. Véanse las gráficas en la Figura 4.9.

a) $f(x) = 3\cos(x)$

La amplitud es el valor k, en este caso es igual a 3.

El periodo viene dado por la expresión $T = \dfrac{2\pi}{a} = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$.

La frecuencia es $v = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}$.

El desfase es $b = 0$.

b) $f(x) = 4\cos(2x)$

La amplitud es el valor k, en este caso es igual a 4.

El periodo viene dado por la expresión $T = \dfrac{2\pi}{a} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

La frecuencia es $v = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{\pi}$.

El desfase es $b = 0$.

c) $f(x) = 3\cos(2x + 2)$

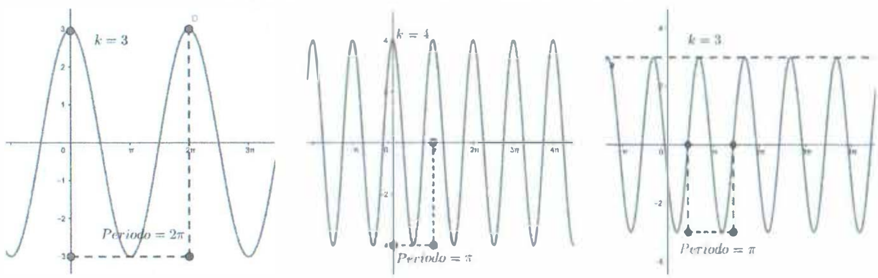
La amplitud es el valor k, en este caso es igual a 3.

El periodo viene dado por la expresión $T = \dfrac{2\pi}{a} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

La frecuencia es $v = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{\pi}$.

El desfase es $b = 2$.

Figura 4.9: Funciones ondulatorias



$f(x) = 3\cos(x)$ $f(x) = 4\cos(2x)$ $f(x) = 6\cos(4x + 2)$

—— ∞ ——

Problema 4.22. Determina el valor de n suponiendo que $a > 0$ y $a \neq 1$ en las siguientes expresiones:

a) $a^3 \cdot a^5 = a^n$ **b)** $\dfrac{a^2}{a^6} = a^n$ **c)** $\dfrac{a^5 a^{1/3}}{a^n} = a$

d) $(a^n)^3 = \sqrt{a}$ **e)** $2^5 n = 2^7$.

Solución.

a) $a^3 \cdot a^5 = a^n$

$$a^n = a^3.a^5 = a^{3+5} = a^8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = 8.$$

b) $\dfrac{a^2}{a^6} = a^n$

$$a^n = \frac{a^2}{a^6} = a^{2-6} = a^{-4} \Rightarrow n = -4.$$

c) $\dfrac{a^5 a^{1/3}}{a^n} = a$

$$a = \frac{a^5 a^{1/3}}{a^n} = \frac{a^{5+1/3}}{a^n} = \frac{a^{16/3}}{a^n} \Rightarrow a^n = \frac{a^{16/3}}{a} = a^{(16/3)-1} = a^{13/3},$$
$$a = a^{13/3} \Rightarrow n = \frac{13}{3}.$$

d) $(a^n)^3 = \sqrt{a}$

$$(a^n)^3 = a^{3n} = \sqrt{a} = a^{1/2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3n = \frac{1}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{6}.$$

e) $2^5 n = 2^7$

$$n = \frac{2^7}{2^5} = 2^2 = 4.$$

——— ∞ ———

Problema 4.23. Halla el valor de las siguientes expresiones:

a) $f(2)$ si $f(x) = e^{kx}$y $f(1) = 20$

b) $f(2)$ si $f(x) = 50 - Ae^{kx}$, $f(0) = 30$ y $f(4) = -4,2$

Solución.

a) $f(2)$ si $f(x) = e^{kx}$y $f(1) = 20$.

La función viene dada por

$$f(x) = e^{kx},$$

y se sabe que la función evaluada en 1 vale 20, es decir, $e^{k\cdot 1} = 20$, luego tomando logaritmos se puede obtener el valor de k:

$$f(1) = e^{k\cdot 1} = e^k = 20 \Rightarrow \ln(e^k) = k = ln(20) \simeq 3.$$

Por tanto, la función es:

$$f(x) = e^{3x}.$$

Y el valor de la función evaluado en 2 es:

$$f(2) = e^{3\cdot 2} = 403,42.$$

b) $f(2)$ si $f(x) = 50 - Ae^{kx}$, $f(0) = 30$ y $f(4) = -4,2$

La función viene dada por:

$$f(x) = 50 - Ae^{kx},$$

y se sabe que la función evaluada en 0, vale 30,

$$f(0) = 50 - Ae^{0k} = 30,$$

y despejando se puede obtener el valor de A:

$$50 - Ae^{0k} = 30 \Rightarrow A \cdot 1 = 50 - 30 = 20.$$

Conocido el valor de A, la función es:

$$f(x) = 50 - 20e^{kx}$$

y evaluada en 4 vale $-4,2$, luego tomando logaritmos se puede obtener el valor de k:

$$f(4) = 50 - 20e^{4k} = -4,2 \Rightarrow e^{4k} = \frac{50 + 4,2}{20} = 2,71$$
$$\Rightarrow ln(e^{4k}) = 4k = ln(2,71) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, la función es:

$$f(x) = 50 - 20e^{x/4}.$$

Y el valor de la función evaluado en 2 es:

$$f(2) = 50 - 20e^{2/4} = 50 - 20 \cdot 1,648 = 17,026.$$

——— ∞ ———

Problema 4.24. Usando las propiedades de las funciones exponenciales determina las gráficas de:

a) $f(x) = 3^x$ **b)** $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Solución.

a) $f(x) = 3^x$

i) Una función exponencial es siempre positiva, por tanto,

$$3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

ii) Como $a = 3 > 1$, la función es creciente.

iii) Como $a = 3 > 1$,

$$\lim_{x \to \infty} 3^x = \infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} 3^x = 0.$$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

i) Una función exponencial es siempre positiva, luego

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

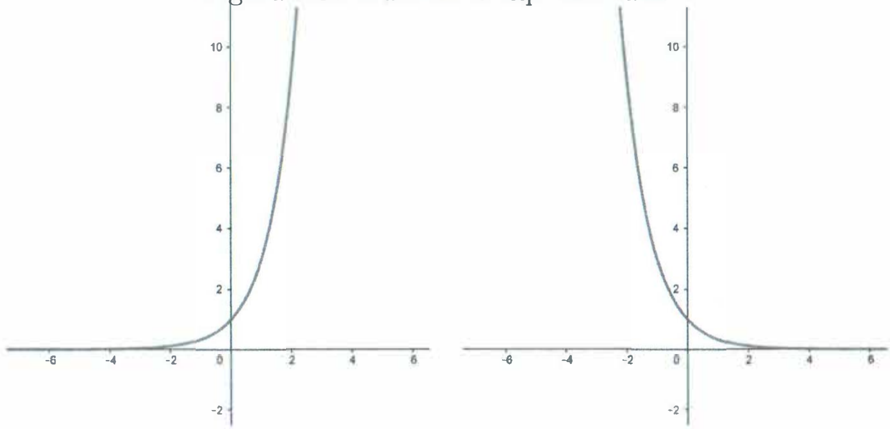
ii) Como $a = \frac{1}{3} < 1$, la función es decreciente.

iii) Como $a = \frac{1}{3} < 1$,

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = \infty.$$

Figura 4.10: Funciones exponenciales



$f(x) = 3^x$ $\qquad$ $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

——— ∞ ———

Problema 4.25. Halla el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $x = \lg_3 27$ $\quad$ **b)** $x = \lg_2 256$ $\quad$ **c)** $x = \lg_5 625$ $\quad$ **d)** $x = \lg_4 \sqrt{2}$

Solución.

a) $x = \lg_3 27$

Se sabe que

$$\lg_a y = x \iff f(x) = a^x = y, \ a > 0, \ a \neq 1,$$

y en este caso se obtiene

$$x = \lg_3 27 \iff 3^x = y = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3.$$

b) $x = \lg_2 256$

$$x = \lg_2 256 \Rightarrow 2^x = y = 256 \Rightarrow 2^x = 2^8 \Rightarrow x = 8.$$

c) $x = \lg_5 625$

$$x = \lg_5 625 \Rightarrow 5^x = y = 625 \Rightarrow 5^x = 5^4 \Rightarrow x = 4.$$

d) $x = \lg_4 \sqrt{2}$

$$x = \lg_4 \sqrt{2} \Rightarrow 4^x = y = \sqrt{2} \Rightarrow 4^x = 2^{1/2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^{2x} = 2^{1/2} \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}.$$

—— ∞ ——

Problema 4.26. Halla el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $\ln x = \ln 3 + \ln 2$ b) $\ln x = \ln 6 - \ln 2$

c) $\ln_{10} x = \ln_5 5 - \ln_5 1$ d) $\ln x = \ln 2 + 4 \ln 2$

Solución.

a) $\ln x = \ln 3 + \ln 2$

Por las propiedades de los logaritmos se tiene:

$$\lg_a(xy) = \lg_a(x) + \lg_a(y),$$

entonces, en este caso,

$$\ln x = \ln 3 + \ln 2 = \ln(3 \cdot 2) = \ln 6 \Rightarrow x = 6.$$

b) $\ln x = \ln 6 - \ln 2$

Por las propiedades de los logaritmos se tiene:

$$\lg_a\left(\frac{x}{y}\right) = \lg_a(x) - \lg_a(y),$$

entonces, en este caso,

$$\ln x = \ln 6 - \ln 2 = \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \ln 3 \Rightarrow x = 3.$$

c) $\lg_{10} x = \lg_5 5 - \lg_5 1$

Por las propiedades de los logaritmos se tiene:

$$\lg_a a = 1,\ \lg_a 1 = 0,$$

entonces, en este caso,

$$\lg_{10} x = \lg_5 5 - \lg_5 1 = 1 - 0 = 1 \Rightarrow x = 10.$$

d) $\ln x = \ln 2 + 4 \ln 2.$

Por las propiedades de los logaritmos se tiene:

$$\lg_a x^b = b \lg_a x, \ b \in \mathbb{R},$$

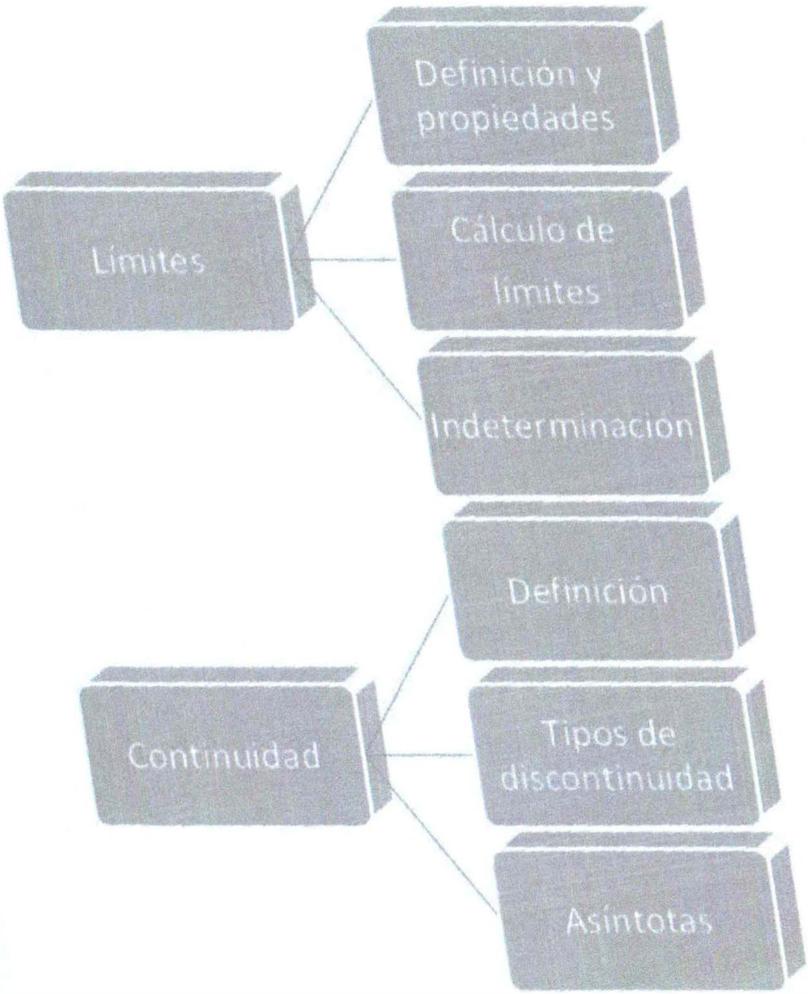
entonces, en este caso,

$$\ln x = \ln 2 + 4 \ln 2 = \ln 2 + \ln 2^4 = \ln(2 \cdot 2^4) \Rightarrow x = 2^5 = 32.$$

—— ∞ ——

Capítulo 5

Límites y continuidad



Problema 5.1. Halla el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ cuando x tiende a 2 por aproximaciones.

Solución.

En este caso se puede comprobar que la función en principio no está definida para el punto 2, lo cual no es óbice para que se pueda hallar el límite.

Se dan valores a izquierda y derecha del punto buscado, en este caso 2, y los valores de la función se van aproximando cada vez más al valor del límite, obteniéndose la siguiente tabla:

$x < 2$	$f(x)$	$x > 2$	$f(x)$
1	3,00	3	5
1,50	3,50	2,5	4,50
1,75	3,75	2,25	4,25
1,90	3,90	2,10	4,10
1,95	3,95	2,05	4,05
1,99	3,99	2,01	4,01
1,995	3,995	2,005	4,005
1,999	3,999	2,001	4,001
1,9999	3,9999	2,0001	4,0001

De donde se puede deducir que el valor del límite para la función dada cuando x tiende a 2 es igual a 4.

——— ∞ ———

Problema 5.2. Halla el límite de $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ cuando x tiende a 3.

Solución.

En este caso se sustituye el valor al que tiende el límite en la función

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{3^2-4}{3-2} = 5.$$

Como el resultado obtenido al realizar la sustitución es un número real finito entonces el valor del límite es 5.

——— ∞ ———

Problema 5.3. Halla el límite de $f(x) = \frac{|x|}{x}$ cuando x tiende a 0.

Solución.

En primer lugar se hallan los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

Como los límites laterales existen pero son distintos, entonces se puede asegurar que no hay límite cuando x tiende a 0.

——— ∞ ———

Problema 5.4. Halla el límite de $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x tiende a 0.

Solución.

La función no está definida en el punto $x = 0$, por lo que no se puede evaluar la función en ese valor, por ello se dan valores a derecha y a izquierda:

$x < 0$	$f(x)$	$x > 0$	$f(x)$
-1	-1	1	1
$-0,5$	-2	$0,5$	2
$-0,25$	-4	$0,25$	4
$-0,1$	-10	$0,1$	10
$-0,05$	-20	$0,05$	20
$-0,01$	-100	$0,01$	100
$-0,001$	-1000	$0,001$	1000

Y lo que ocurre es que según se acerca x al punto 0, los valores van creciendo hasta $\pm\infty$, según se acerque por la izquierda o por la derecha.

Por tanto, se concluye que no existe límite finito.

——— ∞ ———

Problema 5.5. Halla el límite de $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ cuando x tiende a 0.

Solución.

En este caso se pueden tomar distintos puntos cada vez más cercanos a 0, pero el valor de la función oscila en todo momento entre -1 y 1, luego no se acerca tanto como se quiera a un determinado valor.

$x < 0$	$f(x) = \cos\frac{1}{x}$	$x > 0$	$f(x) = \cos\frac{1}{x}$
$-\pi$	$-0,31$	π	$0,31$
$-\pi/5$	$-0,99$	$\pi/5$	$0,99$
$-\pi/15$	$0,99$	$\pi/15$	$-0,99$
$-\pi/25$	$-0,99$	$\pi/25$	$0,99$
$-\pi/35$	$0,98$	$\pi/35$	$-0,98$
$-\pi/45$	$-0,98$	$\pi/45$	$0,98$
$-\pi/55$	$0,97$	$\pi/55$	$-0,97$

Por muy cerca que se esté del 0, el límite oscila entre -1 y 1, tanto si se acerca por la izquierda como si se acerca por la derecha.

—— ∞ ——

Problema 5.6. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x+2}{x^2-2}\right)$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x-1}-\frac{x}{x^2-2}\right)$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2+x-1}$ d) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}$

e) $\displaystyle \lim_{x\to 1/2}\left(\frac{x+1/2}{x}\right)^{4x}$

Solución.

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x+2}{x^2-2}\right)$

Se trata del límite de una suma, por tanto es igual a la suma de los límites:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x+2}{x^2-2}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{2}{x-2}+\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2-2} = \frac{2}{-1}+\frac{3}{-1} = -5.$$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{x}{x^2-2}\right)$

Se trata del límite de una diferencia, por tanto es igual a la diferencia de los límites:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x-1}-\frac{x}{x^2-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x-1}\right)-\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x^2-2}\right)=\frac{4}{1}-\frac{2}{2}=3.$$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x^2+x-1}$

Se trata del límite de un cociente:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2+x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+1\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x-1\right)}$$

y si se sustituye directamente se tiene:

$$L=\frac{1+1}{1+1-1}=\frac{2}{1}=2.$$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3}$

En este caso se trata del límite de una potencia:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}=\lim_{x\to 1}(x+3)^{\lim\limits_{x\to 1}1/2}=(1+3)^{1/2}=2.$$

e) $\lim\limits_{x\to 1/2}\left(\dfrac{x+1/2}{x}\right)^{4x}$

Se trata del límite de una potencia y se puede escribir:

$$L=\lim_{x\to 1/2}\left(\frac{x+1/2}{x}\right)^{\lim\limits_{x\to 1/2}(4x)}$$

Y sustituyendo:

$$L=\left(\frac{1/2+1/2}{1/2}\right)^{4\cdot(1/2)}=\left(\frac{1}{1/2}\right)^2=2^2=4.$$

——— ∞ ———

Problema 5.7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} (5x-1)^2$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\left(x^3+2x+1\right)\sqrt{x+3}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to -2} e^{\frac{x^2-4}{x^2+4}}$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{x^2+2x-1}{x+5}\right)^{x+4}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \log\left(x^3+26\right)$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 3} (5x-1)^2$

Al ser un polinomio se sustituye directamente el valor en la función

$$\lim_{x\to 3} (5x-1)^2 = (5\cdot 3-1)^2 = 14^2 = 196.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

Al ser una función racional se sustituye directamente el valor en la función y se comprueba que no se anula el denominador, luego el límite será el valor obtenido

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1} = \frac{0^3-1}{0^2-2\cdot 0+1} = -1.$$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\left(x^3+2x+1\right)\sqrt{x+3}\right]$

En este caso se trata del producto de un polinomio por una potencia,

$$\lim_{x\to 1} \left[\left(x^3+2x+1\right)\sqrt{x+3}\right] = \left[\left(1^3+2\cdot 1+1\right)\sqrt{1+3}\right]$$

$$= 4\sqrt{4} = 4\cdot 2 = 8.$$

d) $\lim\limits_{x\to -2} e^{\frac{x^2-4}{x^2+4}}$

Se trata del límite de una potencia y sustituyendo se tiene:

$$\lim_{x\to -2} e^{\frac{x^2-4}{x^2+4}} = \lim_{x\to -2} e^{\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+4}} = e^{\frac{(-2)^2-4}{(-2)^2+4}} = e^0 = 1.$$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{x^2+2x-1}{x+5}\right)^{x+4}$

Se trata del límite de una potencia y sustituyendo se tiene:

$$\lim_{x \to -3} \left(\frac{x^2+2x-1}{x+5}\right)^{x+4} = \left(\frac{(-3)^2+2(-3)-1}{(-3)+5}\right)^{(-3)+4}$$
$$= \left(\frac{9+(-6)-1}{-3+5}\right)^{1} = 1.$$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \log\left(x^3+26\right)$

En este caso se sustituye directamente y se tiene:

$$\lim_{x \to 1} \log\left(x^3+26\right) = \log\left(1^3+26\right)$$
$$= \log(27) = \log\left(3^3\right) = 3\log(3).$$

—— ∞ ——

Problema 5.8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+6x+5x^3}{2x^2+x}$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^5-3x^4-3x+9}{x^2-6x+9}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x^2-8x+12}}$ d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+2x+x^2}-\sqrt{4-2x+x^2}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+6x+5x^3}{2x^2+x}$

Sustituyendo directamente se llega a una indeterminación:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+6x+5x^3}{2x^2+x} = \frac{0^2+6\cdot 0+5\cdot 0^3}{2\cdot 0^2+0} = \frac{0}{0}.$$

Sacando factor común x en el numerador y en el denominador:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+6x+5x^3}{2x^2+x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+6+5x^2)}{x(2x+1)} = \frac{0+6+5\cdot 0^2}{2\cdot 0+1} = 6.$$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^5-3x^4-3x+9}{x^2-6x+9}$

Sustituyendo directamente se llega a una indeterminación:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^5-3x^4-3x+9}{x^2-6x+9}=\frac{3^5-3\cdot 3^4-3\cdot 3+9}{3^2-6\cdot 3+9}=\frac{0}{0}.$$

Descomponiendo por Ruffini, sabiendo que $x=3$ es una raíz del numerador y del denominador:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^5-3x^4-3x+9}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^4-3)}{(x-3)^2}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^4-3}{x-3}=\frac{78}{0}=+\infty.$$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x^2-8x+12}}$

Sustituyendo directamente se llega a una indeterminación:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x^2-8x+12}}=\frac{\sqrt{2^2-5\cdot 2+6}}{\sqrt{2^2-8\cdot 2+12}}=\frac{\sqrt{4-10+6}}{\sqrt{4-16+12}}=\frac{0}{0}.$$

Descomponiendo por Ruffini, sabiendo que $x=2$ es una raíz del numerador y del denominador:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x^2-8x+12}}=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+12}}=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{(x-3)(x-2)}{(x-6)(x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{(x-3)}{(x-6)}}=\sqrt{\frac{(2-3)}{(2-6)}}=\sqrt{\frac{-1}{-4}}=\frac{1}{2}.$$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}$

Sustituyendo directamente se llega a una indeterminación:

$$\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}=\frac{5-5}{\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\frac{0}{0}.$$

Como aparecen raíces en el denominador, se multiplica y divide por el conjugado del denominador, es decir, por $(\sqrt{5}+\sqrt{x})$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)(\sqrt{5}+\sqrt{x})}{(\sqrt{5}-\sqrt{x})(\sqrt{5}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)(\sqrt{5}+\sqrt{x})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{x})^2}=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)(\sqrt{5}+\sqrt{x})}{(5-x)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\sqrt{5}+\sqrt{x}=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}.$$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x}$

Sustituyendo directamente se llega a una indeterminación:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x}=\frac{\sqrt{1}-1}{1-1}=\frac{0}{0}.$$

Como aparecen raíces en el numerador se multiplica y divide por el conjugado $(\sqrt{x}+1)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1-x)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(1-x)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{-1}{2}.$$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+2x+x^2}-\sqrt{4-2x+x^2}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

Sustituyendo directamente se llega a una indeterminación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+2\cdot 0+0^2}-\sqrt{4-2\cdot 0+0^2}}{\sqrt{2+0}-\sqrt{2-0}}=\frac{0}{0}.$$

Como aparecen raíces en numerador y denominador, se multiplica y divide, en primer lugar, por el conjugado del numerador y seguidamente por el conjugado del denominador,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+2x+x^2}-\sqrt{4-2x+x^2}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+2x+x^2}\right)^2-\left(\sqrt{4-2x+x^2}\right)^2}{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4+2x+x^2-4+2x-x^2}{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{\left(\left(\sqrt{2+x}\right)^2-\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right)\left(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{(2+x-2+x)\left(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{2x\left(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{\left(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2}\right)}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0}\right)}{\left(\sqrt{4+2\cdot 0+0^2}+\sqrt{4-2\cdot 0+0^2}\right)}=\frac{2(2\sqrt{2})}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\sqrt{2}.$$

——— ∞ ———

Problema 5.9. Calcula el límite de la siguiente función en $x = 10$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x+5}, & \text{si } x<10\\[2ex] \sqrt{8x+1}, & \text{si } x\geq 10\end{cases}$$

Solución.

Se trata de una función definida a trozos, y $x = 10$ es el punto en el que cambia la definición, luego, se han de calcular los límites laterales.

Para calcular el límite lateral por la izquierda, se toman valores menores a 10, por tanto se utiliza el trozo de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x+5}$:

$$\lim_{x\to 10^-} f(x) = \lim_{x\to 10^-} \frac{x^2}{x+5} = \frac{10^2}{10+5} = \frac{100}{15} = \frac{20}{3}.$$

Para calcular el límite lateral por la derecha, se toman valores mayores a 10, luego se usa la expresión $f(x) = \sqrt{8x+1}$:

$$\lim_{x\to 10^+} f(x) = \lim_{x\to 10^+} \sqrt{8x+1} = \sqrt{8\cdot 10+1} = 9.$$

Como los límites laterales son distintos, se concluye que no existe $\lim\limits_{x\to 10} f(x)$.

———— ∞ ————

Problema 5.10. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4}{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} e^{\frac{1}{x-3}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x^2}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

Para hallar este límite se necesita calcular los límites laterales:

Si $x \to 2^-$, entonces $x < 2$ y $x - 2 < 0$, luego $|x-2| = -(x-2)$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1.$$

Si $x \to 2^+$, entonces $x > 2$ y $x - 2 > 0$, luego $|x-2| = (x-2)$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)}{x-2} = 1.$$

Como los límites laterales son distintos, entonces no existe límite en ese punto.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4}{x-1}$

Como $x - 1 \to 0$, cuando $x \to 1$, y esto anula el denominador, se calculan los límites laterales:

Si $x \to 1^-$, se tienen valores muy pequeños y negativos de $x - 1$,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{4}{x-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty.$$

Si $x \to 1^+$, se tienen valores muy pequeños y positivos de $x-1$,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{4}{x-1} = \frac{4}{0^+} = +\infty.$$

Como los límites laterales son distintos entonces no existe límite en ese punto.

c) $\lim\limits_{x\to 3} e^{\frac{1}{x-3}}$

Como $x-3 \to 0$, cuando $x \to 3$, y esto anula el denominador, se calculan los límites laterales:

Si $x \to 3^-$, se tienen valores muy pequeños y negativos de $x-3$,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{x-3}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0.$$

Si $x \to 3^+$, se tienen valores muy pequeños y positivos de $x-3$,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} e^{\frac{1}{x-3}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Como los límites laterales son distintos, entonces no existe límite en ese punto.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x^2}$

Para hallar este límite se calculan los límites laterales:

Si $x \to 0^-$, se tienen valores muy pequeños y negativos de x,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{(0^-)^2} = +\infty.$$

Si $x \to 0$, se tienen valores muy pequeños y positivos de x,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{(0^+)^2} = +\infty.$$

Como los límites laterales son iguales, entonces existe límite y es un límite infinito.

——— ∞ ———

Problema 5.11. Calcula los siguientes límites en el infinito:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 - 4x + 3\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(5x+2)(x+3)}{-(x+6)^2}$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x + 5}{2x+6}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 - 4x + 3\right)$

El límite de un polinomio, cuando $x \to -\infty$, es el valor del término de mayor grado evaluado en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 4x + 3 \approx \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty^3 = -\infty.$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(5x+2)(x+3)}{-(x+6)^2}$

Sustituyendo se llega a una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.Y se sabe que en una función racional

$$f(x) = \frac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_q}$$

el límite es:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } p > q \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p < q \end{cases}$$

Operando la expresión inicial se puede reescribir como:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{(5x+2)(x+3)}{-(x+6)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 17x + 6}{-x^2 - 12x - 36}.$$

Por tanto, y como $p = 2 = q$, se puede asegurar que el límite será:

$$L = \frac{a_0}{b_0} = \frac{5}{-1} = -5.$$

A continuación, se comprueba paso a paso:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(5x+2)(x+3)}{-(x+6)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+17x+6}{-x^2-12x-36}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{5x^2+17x+6}{x^2}}{\dfrac{-x^2-12x-36}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\dfrac{17}{x}+\dfrac{6}{x^2}}{-1-\dfrac{12}{x}-\dfrac{36}{x^2}}$$

$$= \frac{5+\dfrac{17}{\infty}+\dfrac{6}{\infty^2}}{-1-\dfrac{12}{\infty}-\dfrac{36}{\infty^2}} = \frac{5+0+0}{-1-0-0} = -5.$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+2\,x+5}{2x+6}$

Sustituyendo se llega a una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

El límite como se ha visto es el límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador, y como $p = 3 > 1 = q$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+2\,x+5}{2\,x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2\,x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2} = \frac{(-\infty)^2}{2} = \infty.$$

Se puede calcular el límite paso a paso:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+2\,x+5}{2\,x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^3+3x^2+2\,x+5}{x^3}}{\dfrac{2\,x+6}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}} = \frac{1+0+0+0}{0+0} = +\infty.$$

——— ∞ ———

Problema 5.12. Calcula los siguientes límites en el infinito

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3+3x^2+8}{x+\sqrt{9x^6+23}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}}{2+3x^{-1}+4x^{-2}+5x^{-3}}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3+5x+4x^2+x^5}{4+x^2}$.

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3+3x^2+8}{x+\sqrt{9x^6+23}}$

Sustituyendo se llega a una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

El límite es el límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador, y como $p=3=q$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3+3x^2+8}{x+\sqrt{9x^6+23}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^3}{\sqrt{9x^6}}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^3}{3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{3} = 2.\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}}{2+3x^{-1}+4x^{-2}+5x^{-3}}$

El límite es el límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador, y como $p=0=q$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}}{2+3x^{-1}+4x^{-2}+5x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1x^0}{2x^0} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3+5x+4x^2+x^5}{4+x^2}$

Sustituyendo se llega a una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

El límite es el límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador, y como $p=5>2=q$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{3+5x+4x^2+x^5}{4+x^2} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5}{x^2}\\ &= \lim_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty.\end{aligned}$$

——— ∞ ———

Problema 5.13. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{x^2+2}{x-3}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x}\right)^{\frac{4x^2+2}{3x^2+5x}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{x+5}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^x$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{x^2+2}{x-3}}$

En este caso se está ante el límite de una potencia, luego

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^2+2}{x-3}} = \lim_{x\to\infty} e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x-3}},$$

y al calcular el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{x-3}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

luego se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^2+2}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x-3}} = e^{\infty} = \infty.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x}\right)^{\frac{4x^2+2}{3x^2+5x}}$

Es el límite de una potencia, luego

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{3x}\right)^{\frac{4x^2+2}{3x^2+5x}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{3x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2+2}{3x^2+5x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4/3}.$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^x$

Se sabe que

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & , \text{ si } a > 1 \\ 0 & , \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

por tanto, y como $a = \dfrac{4}{3} > 1$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \infty.$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{x+5}$

Se sabe que

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & , \text{ si } a > 1 \\ \infty & , \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

por tanto, y como $a = 3 > 1$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} 3^{x+5} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = 0.$$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^x$

Como $a = \dfrac{5}{6} < 1$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \left(\frac{5}{6}\right)^{-\infty} = \left(\frac{6}{5}\right)^{\infty} = \infty.$$

——— ∞ ———

Problema 5.14. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3x^2+x}{x^5-x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-3x}{5x^3+x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+3x-2}{x+1}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3x^2+x}{x^5-x^2}$

Sustituyendo se llega a una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

El límite es el límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador, y como $p = 3 < 5 = q$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+x}{x^5-x^2} = 0.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-3x}{5x^3+x^2}$

Sustituyendo se llega a una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

El límite es el límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador, y como $p = 3 = q$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3x}{5x^3+x^2}=\frac{3}{5}.$$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+3x-2}{x+1}$

Sustituyendo se llega a una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

El límite es el límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador, y como $p=2>1=q$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+3x-2}{x+1}=+\infty.$$

——— ∞ ———

Problema 5.15. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+6}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x}-x\right)$ d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-2x\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x^4}{x^2+1}+\frac{5x^3}{x+1}\right)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^2+3x+6}-\frac{x^2}{x+1}\right)$

Solución.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+6}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}\right)$

Se está ante una indeterminación del tipo $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+6}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}\right)=\frac{8}{0}-\frac{2}{0}=\infty-\infty.$$

Operando las fracciones se tiene:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+6}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+6}{x^2-4}-\frac{2(x+2)}{x^2-4}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+6-2x-4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x+2)}=\frac{-1}{4}.$$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\right)$

Se está ante una indeterminación del tipo $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty.$$

Este tipo de indeterminación se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x-5}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-5-x}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-5}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x}}=0.$$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{2x}-x\right)$

Se está ante una indeterminación del tipo $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x}-x\right)=\infty-\infty.$$

En este caso se opera con las fracciones:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3-2x^2}{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{2x}=\frac{-3}{2\cdot\infty}=\frac{-3}{\infty}=0.$$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-2x\right)$

Se está ante una indeterminación del tipo $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-2x\right)=\infty-\infty.$$

En este caso se multiplica y divide por el conjugado:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-2x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+2x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+2x}+2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+2x}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+2x}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+2x-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x}+2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2+2x}+2x}.$$

Se llega a un límite en el infinito de una función racional y se sabe que el límite es el límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador, así por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2+2x}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{(2x+2x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2-x^4}{x^2+1}+\dfrac{5x^3}{x+1}\right)$

Se está ante una indeterminación del tipo $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2-x^4}{x^2+1}+\frac{5x^3}{x+1}\right) = \infty-\infty.$$

En este caso se realiza la suma de fracciones:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2-x^4}{x^2+1}+\frac{5x^3}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(2-x^4\right)(x+1)+\left(x^2+1\right)5x^3}{\left(x^2+1\right)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2-x^5-x^4+5x^5+5x^3}{x^3+x^2+x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^5-x^4+5x^3+2x+2}{x^3+x^2+x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^5}{x^3} = \lim_{x\to\infty} 4x^2 = \infty.$$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x + 6} - \frac{x^2}{x + 1} \right)$

En este caso primero se operan las fracciones y se tiene:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x + 6} - \frac{x^2}{x + 1} \right) \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(x^3 - 1\right)(x + 1) - x^2 \left(x^2 + 3x + 6\right)}{\left(x^2 + 3x + 6\right)(x + 1)} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^3 - 6x^2 - x - 1}{x^3 + 4x^2 + 9x + 6}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo ahora se llega a una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Y en este caso el límite es el límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador, y como $p = 3 = q$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^3 - 6x^2 - x - 1}{x^3 + 4x^2 + 9x + 6} = \frac{-2}{1} = -2.$$

——— ∞ ———

Problema 5.16. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[(x - 2) \left(\frac{x + 4}{x^2 - 4} \right) \right]$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \right)$

Solución.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[(x - 2) \left(\frac{x + 4}{x^2 - 4} \right) \right]$

Si se sustituye directamente se está ante una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$:

$$\lim_{x \to 2} \left[(x - 2) \left(\frac{x + 4}{x^2 - 2} \right) \right] = 0 \cdot \infty \Rightarrow \text{Indeterminación},$$

y al operar queda:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \left[(x - 2) \left(\frac{x + 4}{x^2 - 2} \right) \right] &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(x + 4)}{(x + 2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}\right)$

Al sustituir directamente se tiene una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{Indeterminación.}$$

Como se trata del límite de un cociente de polinomios, los cuales pueden escribirse como producto de monomios, se simplifica y se tiene:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-9}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x+1)}=\frac{4}{3}.$$

—— ∞ ——

Problema 5.17. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{8x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{x^2-4}}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{8x}$

Sustituyendo directamente en el límite se llega a una indeterminación del tipo 1^{∞}.

Se va a resolver el límite a partir de la definición del número e, se busca obtener una expresión del tipo:

$$\left[\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}\right]^{g(x)}$$

pues se sabe que si

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,$$

entonces el límite de la expresión será igual a $e^{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)}$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}\right]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x/3}\right)^{8x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-x/3}\right)^{(-x/3)8x(-3/x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x/3}\right)^{(-x/3)}\right]^{8x(-3/x)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} -24x/x} = e^{-24}.$$

O bien se puede resolver aplicando la siguiente fórmula:

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}$$

y en este caso:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)-1)g(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x} - 1\right) 8x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{3}{x}\right) 8x = -24,$$

luego

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{8x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} (1-\frac{3}{x}-1)8x} = e^{-24}.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2 - \dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{x^3}$

Sustituyendo directamente en el límite se llega a una indeterminación del tipo 1^∞. Se resuelve el límite a partir de la definición del número e,

$$\lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{x^2}{x^2+1}\right)^{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + 1 - \frac{x^2}{x^2+1}\right)^{x^3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}\right)^{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)^{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)^{(x^2+1)\frac{1}{x^2+1}x^3} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}\right]^{\frac{x^3}{x^2+1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2+1}} = e^\infty = \infty.$$

Otra forma de resolverlo sería aplicando la fórmula:

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{x^2}{x^2+1}-1\right)x^3=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}\right)x^3$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\infty,$$

luego

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{x^3}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{x^2}{x^2+1}-1\right)x^3}=e^{\infty}=\infty.$$

c) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\dfrac{1}{x^2-4}}$

Sustituyendo directamente en el límite se llega a una indeterminación del tipo 1^{∞}. Se resuelve el límite a partir de la definición del número e,

$$\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}(1+x-2)^{\frac{1}{x^2-4}}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{x-2}}\right)^{\frac{1}{x-2}(x-2)\frac{1}{x^2-4}}$$
$$=\lim_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{x-2}}\right)^{\frac{1}{x-2}}\right]^{\frac{x-2}{x^2-4}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x+2)}}=e^{1/4}.$$

Si se opta por resolverlo aplicando la fórmula:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)},$$

se tiene que

$$\lim_{x\to 2}(x-1-1)\frac{1}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4},$$

luego

$$\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{x^2-4}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}(x-1-1)\frac{1}{x^2-4}}=e^{1/4}.$$

——— ∞ ———

Problema 5.18. Especifica en qué puntos son infinitésimos las siguientes funciones:

a) $f(x) = x - 5$ b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

Solución.

a) $f(x) = x - 5$

La función vale 0 si $x = 5$, por tanto la función f es un infinitésimo cuando $x = 5$.

b) $f(x) = 3x$

La función vale 0 si $x = 0$, por tanto la función f es un infinitésimo cuando $x = 0$.

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

La función vale 0 si $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, por tanto la función f es un infinitésimo cuando x toma alguno de esos valores.

———— ∞ ————

Problema 5.19. Calcula los siguientes límites aplicando infinitésimos:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{x \cos x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(3e^x - 3)\cos x}{2 \operatorname{sen} x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 \tan x}{2 \ln(1 + x)}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \arctan(x) \ln(1 + x)}{1 - \cos(x)}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{x \cos x} \right)$

Al calcular el límite se observa que se está ante una indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$, y al no ser f y g polinomios no puede simplicarse.

Se sabe que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, por tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(2 \operatorname{sen} x \cos x)}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \operatorname{sen} x}{x}.$$

Y ahora utilizando infinitésimos, se utiliza la equivalencia $\operatorname{sen}(x) \simeq x$, luego

$$\lim_{x \to 0} \frac{4 \operatorname{sen} x}{x} \simeq \lim_{x \to 0} \frac{4x}{x} = \lim_{x \to 0} 4 = 4.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(3e^x-3)\cos x}{2\operatorname{sen} x}\right)$

Se trata de una indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$, y al no ser f y g polinomios no puede simplicarse.

Utilizando infinitésimos, se utilizan las equivalencias $e^x - 1 \simeq x$ y $\operatorname{sen}(x) \simeq x$, luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3e^x-3)\cos x}{2\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\,(e^x-1)\cos x}{2\operatorname{sen} x}$$

$$\simeq \lim_{x\to 0}\frac{3x\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos x}{2} = \frac{3}{2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7\tan x}{3\ln(1+x)}\right)$

Análogamente al caso anterior, se utilizan las equivalencias $\tan(x) \simeq x$ y $\ln(1+x) \simeq x$, luego

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{7\tan x}{3\ln(1+x)}\right) \simeq \lim_{x\to 0}\frac{7x}{3x} = \frac{7}{3}.$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\arctan(x)\ln(1+x)}{1-\cos(x)}\right)$

Utilizando los infinitésimos equivalentes $\arctan(x) \simeq x$, $\ln(1+x) \simeq x$ y $1-\cos(x) \simeq \dfrac{x^2}{2}$, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arctan(x)\ln(1+x)}{1-1\cos(x)} \simeq \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2/2} = 2.$$

——— ∞ ———

Problema 5.20. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$, $x = -4$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$, $x = 4$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, $x = 0$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$, $x = -4$

i) Existe la función evaluada en el punto, $f(-4) = -\dfrac{1}{8}$.

ii) Existe el límite de la función cuando x tiende al punto -4, lo que implica que han de existir los límites laterales y ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{1}{x-4} = -\dfrac{1}{8} \\ \lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{1}{x-4} = -\dfrac{1}{8} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to -4} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{8}.$$

iii) El valor de la función en el punto y el límite de la función cuando x tiende al punto son iguales:

$$f(-4) = -\frac{1}{8} = \lim_{x\to -4} \frac{1}{x-4}.$$

Por tanto, la función es continua en el punto $x = -4$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$, $x = 4$

i) No existe la función evaluada en el punto $x = 4$, luego la función no es continua en ese punto.

c) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, $x = 0$

i) No existe la función evaluada en el punto $x = 0$, luego la función no es continua en ese punto.

d) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$

i) Existe la función evaluada en el punto, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{1} = 1$.

ii) Existe el límite de la función cuando x tiende al punto $-\dfrac{\pi}{2}$, lo que implica que han de existir los límites laterales y ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = 1.$$

iii) El valor de la función en el punto y el límite de la función cuando x tiende al punto son iguales:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right).$$

Por tanto, la función es continua en el punto $x = \frac{\pi}{2}$.

——— ∞ ———

Problema 5.21. Estudia la continuidad lateral en el punto $x = 0$ de la función $f(x) = -\sqrt{-x}$.

Solución.

Esta función está definida en $(-\infty, 0]$ y en todos los puntos distintos de cero es continua. Se estudia qué ocurre en $x = 0$ cuando x se acerca a 0 por la izquierda.

i) Existe $f(x)$ para $x = 0$, $f(0) = \sqrt{0} = 0$.

ii) Existe el límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 0^-} -\sqrt{-x} = 0.$$

iii) El valor de la función en el punto y el límite lateral de la función son iguales:

$$\lim_{x \to 0^-} -\sqrt{-x} = 0 = f(0)$$

luego, se puede afirmar que la función es continua por la izquierda.

——— ∞ ———

Problema 5.22. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^2 + 5$ y $h(x) = x + 1$, estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) + g(x)$ **b)** $f(x) \cdot h(x)$ **c)** $\dfrac{f(x)}{h(x)}$ **d)** $\dfrac{h(x)}{g(x)}$

Solución.

a) $f(x) + g(x)$

La suma de funciones continuas es una función continua, y como los polinomios son funciones continuas resulta una función continua.

$$p(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 4 + x^2 + 5 = 2x^2 + 1.$$

b) $f(x) \cdot h(x)$

El producto de funciones continuas es una función continua, y como los polinomios son funciones continuas resulta una función continua.

$$p(x) = f(x) \cdot h(x) = \left(x^2 - 4\right) \cdot (x + 1) = x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

c) $\dfrac{f(x)}{h(x)}$

El cociente de funciones continuas, donde la función del denominador es distinta de 0, es una función continua. Luego la función es continua en todos los puntos excepto en $x = -1$, pues para este valor el denominador vale 0 y por tanto la función no existe.

$$p(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2 - 4}{x + 1}.$$

d) $\dfrac{h(x)}{g(x)}$

El cociente de funciones continuas, donde la función del denominador es distinta de 0, es una función continua. Luego la función es continua en todos los puntos, pues el denominador no se anula en ningún punto.

$$p(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x + 1}{x^2 + 5}.$$

——— ∞ ———

Problema 5.23. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

c) $f(x) = x^{1/2} + x^{1/3}$ d) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}$

Solución.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

Las raíces n-ésimas son continuas en su dominio: $\mathbb{R}$ si n impar, $\mathbb{R}^+$ si n par.

Y como en este caso $n = 2$ es par, la función es continua en su dominio $[0, \infty)$, y en $x = 0$ la función es continua por la derecha.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Las raíces n-ésimas son continuas en su dominio: $\mathbb{R}$ si n impar, $\mathbb{R}^+$ si n par.

Y como en este caso $n = 3$ es impar, la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

c) $f(x) = x^{1/2} + x^{1/3}$

La función se puede escribir como

$$f(x) = x^{1/2} + x^{1/3} = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}.$$

Y se está ante una suma de funciones que son continuas en su dominio, luego la función es continua en su dominio $[0, \infty)$.

d) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}$

Si se definen $g(x) = \sqrt[4]{x}$ y $h(x) = x^2 + 1$, entonces la función f es una composición de funciones continuas en su dominio:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \sqrt[4]{x^2 + 1},$$

y es una función continua para todo x de $\mathbb{R}$.

—— ∞ ——

Problema 5.24. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \tan(e^x)$ b) $f(x) = \ln x + \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x + \cos x}$ d) $f(x) = \sqrt{e^x}$

Solución.

a) $f(x) = \tan(e^x)$

Si se definen $g(x) = \tan x$ y $h(x) = e^x$, entonces la función f es una composición de funciones:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \tan(e^x),$$

y es una función continua para todo x de $\mathbb{R}$ si $\cos(x) \neq 0$.

b) $f(x) = \ln x + \operatorname{sen} x$

Si se definen $g(x) = \ln x$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$, entonces la función f es una suma de funciones:

$$f(x) = g(x) + h(x) = \ln x + \operatorname{sen} x,$$

y es una función continua en todo su dominio $(0, \infty)$.

c) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x + \cos x}$

Si se definen $g(x) = e^x$ y $h(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, entonces la función f es una composición de funciones continuas:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = e^{\operatorname{sen} x + \cos x},$$

y es una función continua para todo x de $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \sqrt{e^x}$

Si se definen $g(x) = x^{1/2}$ y $h(x) = e^x$, entonces la función f es una composición de funciones continuas:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = (e^x)^{1/2} = \sqrt{e^x},$$

y es una función continua, pues $h(x) \geq 0$ para todo x de $\mathbb{R}$.

——— ∞ ———

Problema 5.25. Estudia las discontinuidades de las siguientes funciones y clasifícalas.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2x}{x+1} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Solución.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

En este caso es una función a trozos, donde cada rama es una función polinómica continua en todo su dominio. El único posible punto de discontinuidad sería donde se unen las ramas. Se estudia, por tanto, qué ocurre en el punto $x = 1$.

La primera condición de continuidad de una función en un punto es que la función esté definida en el punto, pero eso no ocurre para la presente función, luego se concluye que la función no es continua en $x = 1$ por no existir $f(1)$.

Es una discontinuidad evitable.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Análogamente al caso anterior, el único posible punto de discontinuidad sería donde se unen las ramas. Se estudia, por tanto, qué ocurre en el punto $x = 1$.

i) Existe la función evaluada en el punto, $f(1) = 2$.

ii) Existe el límite de la función cuando x tiende al punto 1, lo que implica que han de existir los límites laterales y ser iguales:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\}$$

iii) El valor de la función en el punto y el límite de la función cuando x tiende al punto son iguales, pero esa condición no se cumple, pues

$$f(1) = 2 \neq 1 = \lim_{x \to 1} f(x).$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

Es una discontinuidad evitable.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Análogamente al caso anterior, el único posible punto de discontinuidad sería donde se unen las ramas. Se estudia, por tanto, qué ocurre en el punto $x = 1$.

i) Existe la función evaluada en el punto, $f(1) = -1$.

ii) No existe el límite de la función cuando x tiende al punto 1, pues aunque existen los límites laterales, no son iguales:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x - 2 = -1 \end{array}\right\}$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

Como la diferencia entre los límites laterales en valor absoluto es una cantidad finita, este caso es un ejemplo de discontinuidad inevitable de salto finito.

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x - 1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Análogamente al caso anterior, el único posible punto de discontinuidad sería donde se unen las ramas. Se estudia, por tanto, qué ocurre en el punto $x = 1$.

i) Existe la función evaluada en el punto, $f(1) = 1$.

ii) No existe el límite de la función cuando x tiende al punto 1, pues aunque existen los límites laterales, no son iguales:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x - 1} = \infty \end{array}\right\}$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 1$.

Como la diferencia entre los límites laterales en valor absoluto es una cantidad infinita, este caso es un ejemplo de discontinuidad inevitable de salto infinito.

e) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2x}{x+1} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

En este caso es una función a trozos, donde la primera rama es una función polinómica continua en todo su dominio, y la segunda es una función racional. Un posible punto de discontinuidad sería donde se unen las ramas. Se estudia, por tanto, qué ocurre en el punto $x = 0$.

i) Existe la función evaluada en el punto, $f(0) = 0$.

ii) Existe el límite de la función cuando x tiende al punto 0, lo que implica que han de existir los límites laterales y ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x}{x+1} = 0 \end{array}\right\}$$

iii) El valor de la función en el punto y el límite de la función cuando x tiende al punto son iguales,

$$f(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x).$$

Luego la función es continua en el punto $x = 0$.

Por otro lado, tal y como está definida la función en la segunda rama, se tiene que la función es continua en $x = 3$ por la izquierda ya que existe $f(3) = \dfrac{3}{2}$ y existe el límite lateral por la izquierda:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

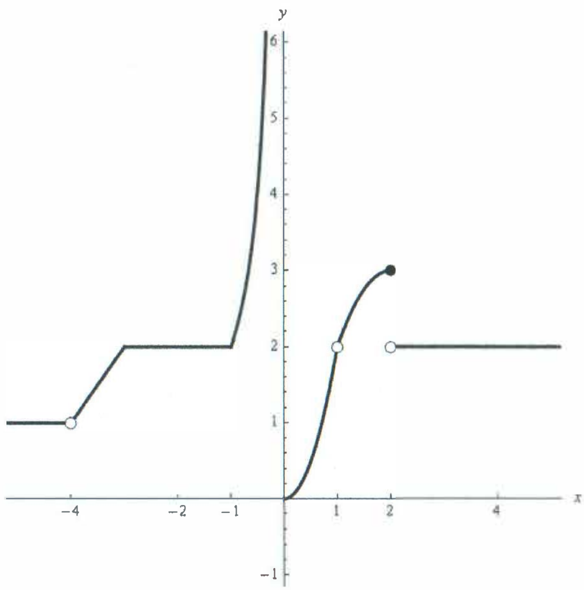
Sin embargo, no existe el límite lateral por la derecha:

$$\nexists \lim_{x \to 3^+} f(x).$$

——— ∞ ———

Problema 5.26. Dada la función de la gráfica, que se muestra a continuación, estudia la continuidad en los siguientes puntos:

a) $x = -4$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = 1$ **d)** $x = 2$



Solución.

a) $x = -4$

i) No existe la función en el punto.

Luego la función tiene una discontinuidad evitable en el punto $x = -4$.

b) $x = 0$

i) Existe la función evaluada en el punto $f(0) = 0$.

ii) No existe el límite de la función cuando x tiende al punto 0, pues, aunque existen los límites laterales, no son iguales:

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \end{array}\right\}$$

Luego la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en el punto $x = 0$.

c) $x = 1$

i) No existe la función en el punto.

Luego la función tiene una discontinuidad evitable en el punto $x = 1$.

d) $x = 2$

i) Existe la función evaluada en el punto $f(2) = 3$.

ii) No existe el límite de la función cuando x tiende al punto 2, pues, aunque existen los límites laterales, no son iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2 \end{array}\right\}$$

Luego la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en el punto $x = 2$.

——— ∞ ———

Problema 5.27. Determina los valores de los parámetros para que sean continuas las funciones siguientes:

a) $f(x) = \begin{cases} a + x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ a + bx & \text{si} \quad 0 < x \leq 4 \\ b + x^2 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ x + k & \text{si } x = 4 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in (\infty, 2] \\ k + x & \text{si} \quad x \in (2, 4] \\ 2qx & \text{si} \quad x \in (4, \infty) \end{cases}$

Solución.

a) $f(x) = \begin{cases} a + x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ a + bx & \text{si} \quad 0 < x \leq 4 \\ b + x^2 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

Se trata de una función definida a trozos, que es continua en el intervalo $(-\infty, 0)$, en el intervalo $(0, 4)$, así como en el intervalo $(4, +\infty)$, pues en cada uno de ellos son polinomios y son continuos para cualesquiera valores de a y b.

Por tanto, queda comprobar la continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 4$.

- Para $x = 0$

i) Existe $f(0) = a + 0^2 = a$.

ii) Se hallan los límites laterales:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} a + x^2 = a \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} a + bx = a \end{aligned}\right\}$$

Luego los límites laterales son iguales.

iii) El valor de la función en el punto y el límite de la función cuando x tiende al punto son iguales. Y se tiene que $f(0) = a = \lim_{x\to 0} f(x)$,

para cualesquiera valores de a y b.

Por tanto, la función es continua en el punto $x = 0$.

- Para $x = 4$

i) Existe $f(4) = a + 4b$.

ii) Se hallan los límites laterales:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 4^-} f(x) &= \lim_{x\to 4^-} a + bx = a + 4b \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) &= \lim_{x\to 4^+} b + x^2 = 16 + b \end{aligned}\right\}$$

Luego los límites laterales son iguales si

$$a + 4b = 16 + b \Longleftrightarrow a = 16 - 3b.$$

iii) El valor de la función en el punto y el límite de la función cuando x tiende al punto han de ser iguales.

$$f(4) = a + 4b = 16 + b = \lim_{x\to 4} f(x) \Rightarrow a = 16 - 3b.$$

Por tanto, la función es continua en el punto si se cumple que

$$a = 16 - 3b.$$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ x + k & \text{si } x = 4 \end{cases};$

Se trata de una función definida a trozos, que es continua en el intervalo $(-\infty, 4)$, así como en el intervalo $(4, +\infty)$, ya que en $x \neq 4$ es un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula en ningún punto del dominio y en el otro trozo es un polinomio. Por tanto, queda comprobar la continuidad en el punto $x = 4$.

i) Existe la función evaluada en el punto $f(4) = 4 + k$.

ii) Existe el límite de la función cuando x tiende al punto 4, lo que implica que han de existir los límites laterales y ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = 8 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = 8 \end{array}\right\}$$

iii) El valor de la función en el punto y el límite de la función cuando x tiende al punto han de ser iguales:

$$f(4) = 4 + k = 8 = \lim_{x \to 4} f(x) \Rightarrow k = 4.$$

Por tanto, la función es continua si $k = 4$.

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in (-\infty, 2] \\ k + x & \text{si} \quad x \in (2, 4] \\ 2qx & \text{si} \quad x \in (4, \infty) \end{cases}$

Se trata de una función definida a trozos. Se analiza la continuidad en cada intervalo y en los extremos de los mismos.

En el intervalo $(-\infty, 2)$, la función esta definida como $f(x) = \dfrac{1}{x}$, que es continua en todos los números reales salvo en $x = 0$. Como $x = 0$ está en el intervalo de estudio, se puede afirmar que la función es continua en $(-\infty, 2)$ salvo en $x = 0$.

En el intervalo $(2, 4)$, la función esta definida como $f(x) = x + k$, que es continua en todos los número reales para cualquier valor de k por ser un polinomio.

En el intervalo $(4, \infty)$, la función esta definida como $f(x) = 2qx$, que es continua en todos los número reales para cualquier valor de q por ser un polinomio.

A continuación, se estudia la continuidad de la pfunción en los puntos $x = 2$ y $x = 4$.

- En $x = 2$

i) Existe $f(2) = \dfrac{1}{2}$

ii) Se hallan los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x + k = k+2\end{array}\right\}$$

Luego los límites laterales son iguales si $\dfrac{1}{2} = k + 2 \Rightarrow k = \dfrac{-3}{2}$.

iii) $f(2) = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $k = \dfrac{-3}{2}$ y en ese caso la función será continua en $x = 2$.

- En $x = 4$

i) Existe $f(4) = k + 4$. Como se ha calculado, $k = \dfrac{-3}{2}$ se sustituye y se tiene $f(4) = 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

ii) Se hallan los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} x - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} 2qx = 8q\end{array}\right\}$$

Luego los límites laterales son iguales si $\dfrac{5}{2} = 8q \Rightarrow q = \dfrac{5}{16}$.

iii) $f(4) = \dfrac{5}{2} = \lim\limits_{x\to 4} f(x)$ si $q = \dfrac{5}{2}$ y en ese caso la función será continua en $x = 4$.

Por tanto, la función es continua en todos los números reales excepto en $x = 0$.

——— ∞ ———

Problema 5.28. Se sabe que la siguiente función es discontinua en $x = 0$:

$$f(x) = \frac{x^2 - x^3}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Define la función en el valor $x = 0$, de forma que la función a trozos resultante sea continua.

Solución.

Hay que definir la función en el valor $x = 0$ de forma que coincida con el valor del límite de la función en el mismo punto.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^3}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Usando infinitésimos se sabe que si $x \to 0$, entonces $x \simeq \operatorname{sen} x$.

Luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-x)}{\operatorname{sen}^2 x}\simeq\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}(1-x)=1.$$

Por tanto, la función será continua si se define de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x^3}{\operatorname{sen}^2 x} & \text{si } x\neq 0\\[2ex] 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

——— ∞ ———

Problema 5.29. Se sabe que la siguiente función es discontinua en los puntos $x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{N}$:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+3x}{\operatorname{sen} x}$$

Define la función en el valor x, de forma que la función a trozos resultante sea continua.

Solución.

Efectivamente el numerador es un polinomio y por tanto es una función continua. El denominador es la función $\operatorname{sen} x$ que también es continua. Por tanto, la función es continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador.

$$\operatorname{sen} x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{N}.$$

Es decir, la función es continua en $\mathbb{R}\backslash\{x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Si se quiere que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$, hay que redefinir la función.

Calculamos el límite de la función cuando $x \to 0$, usando infinitésimos se sabe que si $x \to 0$, entonces $x \simeq \operatorname{sen} x$.

Luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2+3x}{\operatorname{sen} x} \simeq \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2+2x+3)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2+2x+3 = 3.$$

Por tanto, la función será continua si se define de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+2x^2+3x}{\operatorname{sen} x} & \text{si } x \neq 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{N} \\ 3 & \text{si } x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

—— ∞ ——

Problema 5.30. Estudia y clasifica los posibles puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2-49}$ **b)** $f(x) = xe^{1/x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2-49}$

El cociente de funciones continuas, donde la función del denominador es distinta de 0, es una función continua. Luego la función es continua en todos los puntos excepto en $x = 7$ y $x = -7$.

Para esos valores no existe el límite, pues los límites laterales son distintos,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -7^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -7^-} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2-49} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -7^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -7^+} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2-49} = \infty \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2-49} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^+} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2-49} = \infty \end{array}\right\}$$

y como la diferencia entre los límites laterales es infinito, se está ante una discontinuidad inevitable de salto infinito en ambos casos.

b) $f(x) = xe^{1/x}$

La función es continua en todos los puntos excepto en $x = 0$.

Para ese valor no existe el límite, pues los límites laterales son distintos,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} xe^{1/x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x} = \infty \end{array}\right\}$$

y como la diferencia entre los límites laterales es infinito, se está ante una discontinuidad inevitable de salto infinito.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

El cociente de funciones continuas, donde la función del denominador es distinta de 0, es una función continua. Luego la función es continua en todos los puntos excepto en $x = 1$.

Para esos valores no existe el límite, pues los límites laterales son distintos,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = \infty \end{array}\right\}$$

y como la diferencia entre los límites laterales es infinito, se está ante una discontinuidad inevitable de salto infinito.

——— ∞ ———

Problema 5.31. Estudia la continuidad de las siguientes funciones indicando el tipo de discontinuidad existente en su caso:

a) $f(x) = x^3(x-1)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-49}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x^2+6 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x+2 & \text{si } 2 < x \leq 6 \\ (x-4)^3 & \text{si } 6 < x \leq 20 \end{cases}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+15}{x^2-9}}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in (1,+\infty) \end{cases}$

Solución.

a) $f(x) = x^3(x-1)$

Se trata de un polinomio de grado 4, que se puede escribir como:

$$f(x) = x^4 - x^3$$

y como todos los polinomios son continuos en todo $\mathbb{R}$, entonces la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 49}$

Al ser $f(x)$ una función racional, se sabe que es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$, a excepción de aquellos que anulan el denominador, por tanto se tiene que la función es continua en el intervalo $(-\infty, -7)$, en el intervalo $(-7, 7)$ y en el intervalo $(7, +\infty)$.

Se estudia a continuación la continuidad en los puntos $x = -7$ y $x = 7$.

Si $x = -7$, no existe la función evaluada en el punto, luego la función no es continua en el punto indicado.

Si $x = 7$, no existe la función evaluada en el punto, luego la función no es continua en el punto indicado.

c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } 2 < x \leq 6 \\ (x-4)^3 & \text{si } 6 < x \leq 20 \end{cases}$

La función está definida a trozos en el intervalo $(-2{,}20]$ mediante polinomios. Por tanto, la función es continua en cada uno de los intervalos: $(-2{,}2]$, $(2{,}6]$, $(6{,}20]$. Se estudia a continuación lo que ocurre en los extremos de los intervalos:

- En $x = 2$

  i) Existe $f(2) = -2^2 + 6 = 2$.

  ii) Existencia del límite

$$\lim_{x \to 2^-} -x^2 + 6 = 2,$$

$$\lim_{x \to 2^+} x + 2 = 4.$$

  Como los límites laterales son distintos no existe límite en el punto, existe una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

- En $x = 6$

i) Existe $f(6) = 6 + 2 = 8$.

ii) Existencia del límite

$$\lim_{x \to 6^-} x + 2 = 8,$$

$$\lim_{x \to 6^+} (x - 4)^3 = 8.$$

Como $f(6) = 8 = \lim_{x \to 6} f(x)$, la función es continua en el punto $x = 6$.

- En $x = 20$

i) Existe $f(20) = (20 - 4)^3 = 16^3$.

ii) Existencia del límite

$$\lim_{x \to 20^-} (x - 4)^3 = 16^3.$$

iii) Como $f(20)^- = 16^3 = \lim_{x \to 20^-} f(x)$, la función es continua en el punto $x = 20$ por la izquierda.

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x + 15}{x^2 - 9}}$

Al tratarse de una raíz cuadrada, debe cumplir que

$$\frac{3x + 15}{x^2 - 9} \geq 0,$$

además, como hay una fracción se ha de cumplir que

$$x^2 - 9 \neq 0.$$

Estudiando los signos de la función:

$$\frac{3x + 15}{x^2 - 9} = \frac{3(x + 5)}{(x - 3)(x + 3)}.$$

Se construye una tabla en la que aparecen, por un lado, los monomios y, por otro, los intervalos donde cambia el signo, que se obtienen en los valores que anulan los monomios, -5, -3 y 3.

	$x+5$	$x-3$	$x+3$	$\dfrac{3(x+5)}{(x-3)(x+3)}$
$(-\infty,-5)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(-5,-3)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(-3,3)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$(3,+\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

El valor -5 pertenece al dominio, pues la función en ese punto puede calcularse y vale 0.

Los valores -3 y 3 no pertenecen al dominio, pues anulan el denominador.

Luego el dominio es

$$\text{Dom } f(x) = [-5,-3) \cup (3,+\infty).$$

La función es continua en todo su dominio.

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in (1,+\infty) \end{cases}$

Se trata de una función a trozos, que es continua en el intervalo $[0,1]$ por ser un polinomio, así como en el intervalo $(1,+\infty)$ por ser cociente de polinomios cuyo denominador no se anula en el mencionado intervalo.

Por tanto, queda comprobar la continuidad en el punto $x=1$.

Se sabe que para que la función $f(x)$ sea continua en un punto $x=1$ debe cumplir las siguientes tres condiciones:

i) Existe $f(x)$ para $x=1$, $f(1) = 1^2 = 1$.

ii) Existen y son iguales los límites laterales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1/x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1,$$

luego existe el límite de la función en el punto indicado.

iii) El valor de la función en el punto y el límite de la función cuando x tiende al punto son iguales.

$$f(1) = 1 = \lim_{x\to 1} f(x)\,.$$

Por tanto, como se cumplen las condiciones de continuidad, la función es continua en $x = 1$, y por tanto en todo el dominio de definición salvo en $x = 2$.

——— ∞ ———

Problema 5.32. Estudia las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ **b)** $f(x) = \ln(3x-2)$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

El dominio es $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ y como $x = -2$ anula el denominador:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty.$$

Luego la función tiene una asíntota vertical en $x = -2$. Véase Figura 5.1 a).

b) $f(x) = \ln(3x-2)$

El dominio es $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ y en $x = \dfrac{2}{3}$ se tiene:

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}^+} \ln(3x-2) = -\infty.$$

Luego la función tiene una asíntota vertical en $x = \dfrac{2}{3}$. Véase Figura 5.1 b).

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

El dominio es $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

Para $x = -3$, se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{1}{x^2-9} = \infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{1}{x^2-9} = -\infty \end{array}\right\}$$

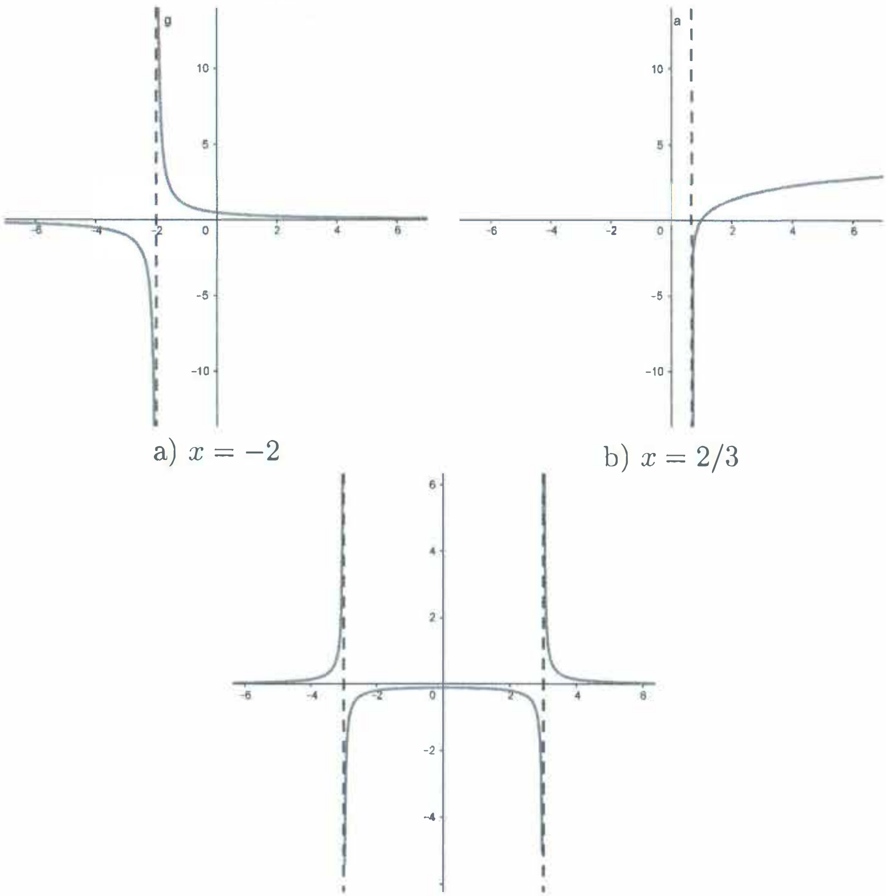
luego existe una asíntota vertical en $x = -3$. Véase Figura 5.1 c).

Para $x = 3$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 7^-} \frac{1}{x^2-9} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 7^+} \frac{1}{x^2-9} = \infty\end{array}\right\}$$

luego existe una asíntota vertical en $x = 3$. Véase Figura 5.1 c).

Figura 5.1: Asíntotas verticales



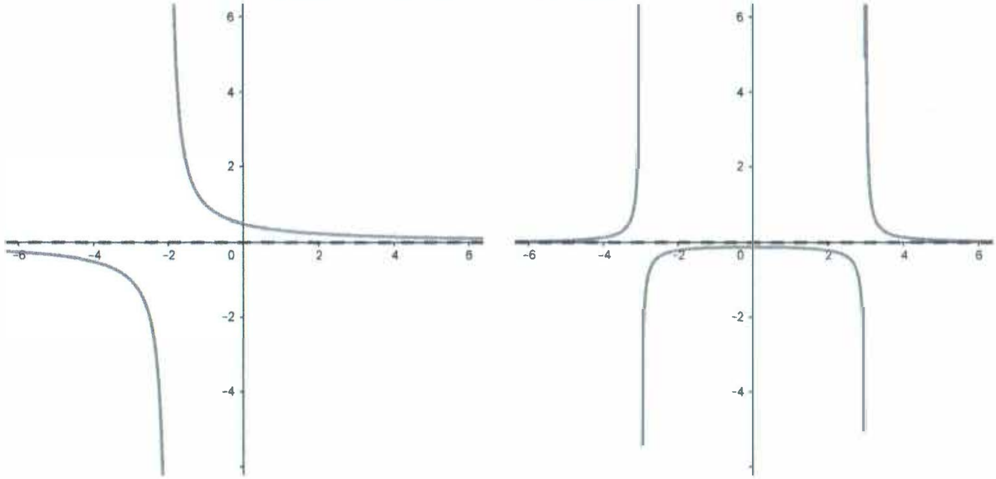
a) $x = -2$

b) $x = 2/3$

c) $x = \pm 3$

———— ∞ ————

Figura 5.2: Asíntotas horizontales



a) $y = 0$ b) $y = 0$

Problema 5.33. Estudia las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ **b)** $f(x) = \ln(3x-2)$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

Si se calculan los límites en el infinito se tiene que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+2} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+2} = 0.$$

Luego la función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$. Véase Figura 5.2 a).

b) $f(x) = \ln(3x-2)$

Si se calculan los límites en el infinito se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \ln(3x-2) = \infty$$

Luego la función no tiene asíntotas horizontales.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

Si se calculan los límites en el infinito se tiene que

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2 - 9} = 0,$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2 - 9} = 0.$$

Luego la función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$. Véase Figura 5.2 b).

——— ∞ ———

Problema 5.34. Estudia las asíntotas horizontales de:

a) $f(x) = 5e^x$ b) $f(x) = 2\arctan x$

Solución.

a) $f(x) = 5e^x$

Si se calculan los límites en el infinito se tiene:

$$\lim_{x\to -\infty} 5e^x = 0,$$

$$\lim_{x\to \infty} 5e^x = \infty.$$

Luego la función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) $f(x) = 2\arctan x$

Si se calcula el límite en el infinito se tiene:

$$\lim_{x\to \infty} 2\arctan x = \pi,$$

$$\lim_{x\to -\infty} 2\arctan x = -\pi.$$

Luego la función cuenta con dos asíntotas horizontales en $y = -\pi$ y en $y = \pi$.

——— ∞ ———

Problema 5.35. Estudia las asíntotas oblicuas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2x-3}$ b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+4}$

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2x-3}$

Las asíntotas oblicuas son de la forma:

$$y = mx + n.$$

En primer lugar, se calcula el valor de m:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{2x-3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x^2-3x} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Como el valor de m es distinto de 0, entonces se calcula ahora el valor de n :

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx),$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2}{2x-3} - \frac{3}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 - 6x^2 + 9x}{4x-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x}{4x-6} = \frac{9}{4}.$$

Luego la función tiene una asíntota oblicua en $y = mx + n = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4}$. Véase Figura 5.3 a).

b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+4}$

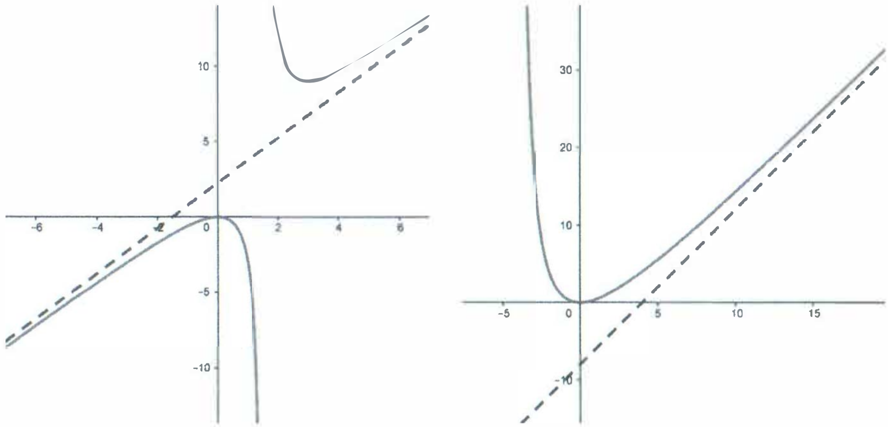
En primer lugar, se calcula el valor de m y n :

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x+4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+4x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2}{x+4} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-8x}{x+4}\right) = -8$$

y, por lo tanto, la función tiene una asíntota oblicua en $y = mx+n = 2x-8$. Véase Figura 5.3 b).

Figura 5.3: Asíntotas oblicuas



a) $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$ b) $y = 2x - 8$

—— ∞ ——

Problema 5.36. Comprueba si la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$ verifica el teorema de Bolzano en el intervalo $[1, 2]$.

Solución.

El teorema de Bolzano afirma que si una función es continua y toma valores de signo contrario en los extremos de un intervalo $[a, b]$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$. Ese punto c es la raíz buscada.

Como $f(x)$ es un polinomio, es una función continua en todo $\mathbb{R}$, y en particular en el intervalo $[1, 2]$.

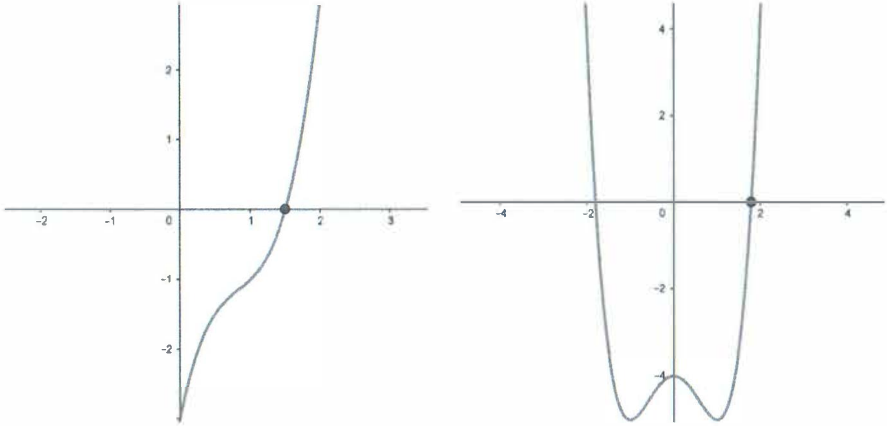
Se tiene que:

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 3 = -1 < 0,$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 3 = 3 > 0,$$

y como $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, se puede afirmar que existe al menos un punto $c \in [1, 2]$ tal que $f(c) = 0$. Véase Figura 5.4 a).

Figura 5.4: Raíces de una función



——— ∞ ———

Problema 5.37. Comprueba si la función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4$ verifica el teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2]$.

Solución.

Como $f(x)$ es un polinomio, es una función continua en todo $\mathbb{R}$, y en particular en el intervalo $[0, 2]$.

Se calcula el valor de la función en los extremos:

$$f(0) = 0^4 - 0 \cdot 1^2 - 4 = -4 < 0,$$

$$f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 - 4 = 4 > 0.$$

y como $f(0) < 0$ y $f(2) > 0$, se puede afirmar que existe al menos un punto $c \in [0, 2]$ tal que$f(x) = 0$. Véase Figura 5.4 b).

——— ∞ ———

Problema 5.38. Comprueba la existencia de una raíz en el intervalo $[1, 2]$ de la función $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$.

Solución.

Se observa que la función al ser una función polinómica es continua en todo su dominio y en particular en el intervalo cerrado $[1, 2]$.

Se calcula el valor de la función en los extremos:

$$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 6 = 4 > 0,$$

$$f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 6 = -6 < 0,$$

y como los signos en los extremos son opuestos, se verifican los supuestos del Teorema de Bolzano y se puede asegurar que existe una raíz c en el intervalo $[1, 2]$, es decir $f(c) = 0$.

—— ∞ ——

Problema 5.39. Demuestra que la ecuación $e^x = x^2$ admite al menos una raíz real en el intervalo $[-1, 0]$.

Solución.

Sea la función:

$$f(x) = e^x - x^2$$

que es continua en todo $\mathbb{R}$ al ser suma de funciones continuas.

Se calcula el valor de la función en los extremos:

$$f(-1) = e^{-1} - (-1)^2 = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

$$f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$$

y como los signos en los extremos son opuestos, se verifican los supuestos del Teorema de Bolzano y se puede asegurar que existe una raíz c en el intervalo $[-1, 0]$, es decir $f(c) = 0$, y por lo tanto:

$$f(x) = e^x - x^2 = 0 \Rightarrow e^x = x^2.$$

—— ∞ ——

Problema 5.40. Estudia si la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 12$ alcanza el valor 10 en el intervalo $[4, 5]$.

Solución.

Se calcula el valor de la función en los extremos:

$$f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 12 = 8,$$

$$f(5) = 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 + 12 = 37.$$

Y, aplicando el teorema de los valores intermedios, se puede asegurar que dado que la función f, al ser polinómica, es continua en el intervalo cerrado $[4, 5]$, entonces alcanza todos los valores entre $f(4)$ y $f(5)$, y en particular el valor 10, es decir, existe un valor c, tal que $f(c) = 10$.

——— ∞ ———

Problema 5.41. Estudia si la función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4$ alcanza el valor 8 en el intervalo $[-3, -2]$.

Solución.

Se calcula el valor de la función en los extremos:

$$f(-3) = (-3)^4 - 2 \cdot (-3)^2 - 4 = 59,$$

$$f(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 - 4 = 4.$$

Y, aplicando el teorema de los valores intermedios, se puede asegurar que dado que la función f, al ser polinómica, es continua en el intervalo cerrado $[-3, -2]$, entonces alcanza todos los valores entre $f(-3)$ y $f(-2)$, y en particular el valor 8, es decir, existe un valor c, tal que $f(c) = 8$.

——— ∞ ———

Problema 5.42. Estudia si la siguiente función tiene máximo y mínimo en el intervalo indicado: $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ en $[0, 2]$.

Solución.

Dado que la función f es continua, por ser polinómica, entonces en un intervalo cerrado es acotada.

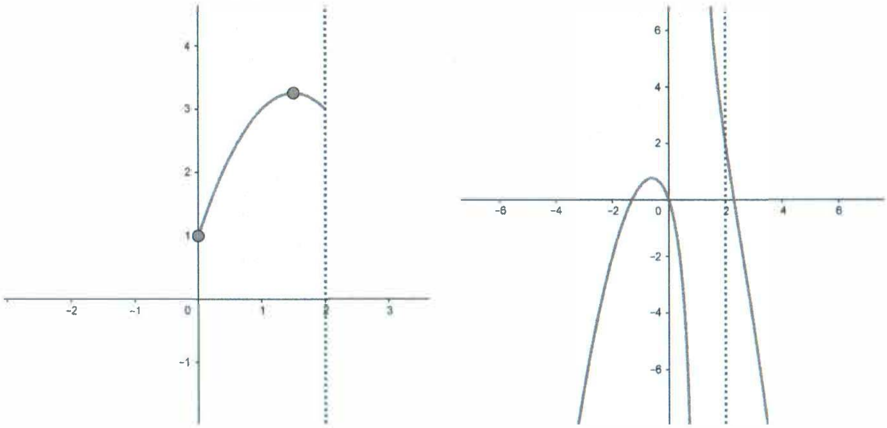
Por el teorema de los valores extremos, f alcanza el máximo y el mínimo en el intervalo cerrado.

Si se esboza la gráfica de la función f, se trata de una parábola con las ramas hacia abajo que tiene su vértice en $x = 3/2$. Véase Figura 5.5 a).

Los valores en los extremos del intervalo son $f(0) = 1$ y $f(2) = 3$.

Por tanto, el mínimo se alcanza en el extremo inferior del intervalo $x = 0$, mientras que el máximo se alcanza en el vértice de la parábola $x = 3/2$.

Figura 5.5: Extremos en un intervalo



a) b)

———— ∞ ————

Problema 5.43. Estudia si la siguiente función tiene máximo y mínimo en el intervalo indicado: $f(x) = \dfrac{-x^2+3x}{x-1} + 1$ en $[0,2]$.

Solución.

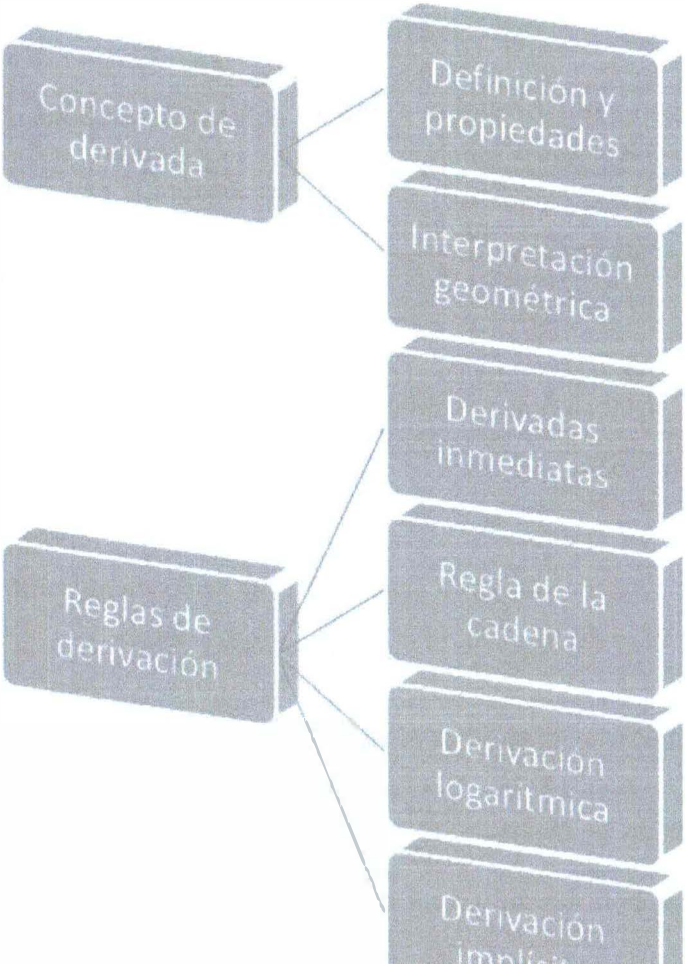
En este caso la función f no es continua en el intervalo dado, hay discontinuidad en el punto $x = 1$.

Luego no se puede aplicar el teorema de los valores extremos, y no se puede asegurar que f alcance el máximo y el mínimo en el intervalo cerrado. Véase Figura 5.5 b).

———— ∞ ————

Capítulo 6

Derivación



Problema 6.1. El precio de la onza de oro en diciembre de 2017 es de 1296,50€ y en diciembre de 2018 es de 1281,65€. Halla la variación del precio, la tasa de variación porcentual y la tasa de variación media trimestral.

Solución.

La variación absoluta es la diferencia de precios, luego

$$\Delta x = x_{2018} - x_{2017} = 1281,65 - 1296,50 = -14,85.$$

La tasa de variación porcentual es la ratio de la variación absoluta sobre el precio original,

$$T = \frac{\Delta x}{x_{t-1}} \cdot 100 = \frac{-14,85}{1296,50} \cdot 100 = -1,145\,\%.$$

Y, finalmente, la tasa de variación media trimestral es la ratio entre la variación absoluta y el número de períodos transcurridos, que al pedirlo el problema en trimestres es igual a $t = 4$, por tanto se tiene:

$$TM = \frac{\Delta x}{4} = \frac{-14,85}{4} = -3,7125.$$

——— ∞ ———

Problema 6.2. El precio de la electricidad (en MWh) ha variado desde los 49,98€ de enero de 2018 a los 61,99€ de enero de 2019. Halla la variación del precio, la tasa de variación porcentual y la tasa de variación media bimensual.

Solución.

La variación absoluta es la diferencia de precios, luego

$$\Delta x = x_{2019} - x_{2018} = 61,99 - 49,98 = 12,01.$$

Esto significa que el precio se ha incrementado en 12,01€ en un año.

La tasa de variación porcentual es la ratio de la variación absoluta sobre el precio original,

$$T = \frac{\Delta x}{x_{t-1}} \cdot 100 = \frac{12,01}{49,98} \cdot 100 = 24,03\,\%.$$

Y, finalmente, la tasa de variación media bimestral es la ratio entre la variación absoluta y el número de períodos transcurridos, que al pedirlo el problema en bimestres es igual a $t = 6$, por tanto se tiene:

$$TM = \frac{\Delta x}{6} = \frac{12,01}{6} = 2,0016.$$

——— ∞ ———

Problema 6.3. Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 + 2$ **b)** $f(x) = x^2 - x$

Solución.

a) $f(x) = 2x^2 + 2$

De acuerdo a la definición se tiene que la tasa de variación instantánea es:

$$TI_f = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 + 2 - 2x^2 - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h \to 0} (4x + 2h) = 4x.$$

b) $f(x) = x^2 - x$

De acuerdo a la definición se tiene que la tasa de variación instantánea es:

$$TI_f = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) - (x^2 - x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x - h - x^2 + x}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x - 1) = 2x - 1.$$

——— ∞ ———

Problema 6.4. Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (4, 4)$ **b)** $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (2, 4)$

c) $P_1 = (3, -3)$ y $P_2 = (-4, 4)$

Solución.

a) $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (4, 4)$

A partir de la definición se tiene que la pendiente es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 2}{4 - 3} = 2.$$

b) $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (2, 4)$

A partir de la definición se tiene que la pendiente es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{2-3} = -2.$$

c) $P_1 = (3, -3)$ y $P_2 = (-4, 4)$

A partir de la definición se tiene que la pendiente es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-3)}{-4-3} = -1.$$

——— ∞ ———

Problema 6.5. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (4, 4)$ b) $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (2, 4)$

c) $P_1 = (3, -3)$ y $P_2 = (-4, 4)$

Solución.

a) $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (4, 4)$

De acuerdo a la definición de la ecuación punto-pendiente de la recta:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Y como se ha calculado que la pendiente es $m = 2$:

$$y - 2 = 2(x - 3),$$

$$y = 2x - 4.$$

b) $P_1 = (3, 2)$ y $P_2 = (2, 4)$

A partir de la definición de la ecuación punto-pendiente de la recta y dado que la pendiente es $m = -2$:

$$y - 2 = -2(x - 3),$$

$$y = -2x + 8.$$

c) $P_1 = (3, -3)$ y $P_2 = (-4, 4)$

A partir de la definición de la ecuación punto-pendiente de la recta y dado que la pendiente es $m = -1$:

$$y - (-3) = -1(x - 3),$$

$$y = -x.$$

——— ∞ ———

Problema 6.6. Halla la pendiente de la recta tangente a las funciones:

a) $f(x) = 2x^2 + 2$ **b)** $f(x) = x^2 - x$

Solución.

a) $f(x) = 2x^2 + 2x$

De acuerdo a la definición se tiene que la pendiente de la recta tangente es:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Luego se tiene:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\left(2(x+h)^2 + 2(x+h)\right) - (2x^2 + 2x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 2x + 2h - 2x^2 - 2x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4x + 2h + 2 = 4x + 2.$$

b) $f(x) = x^3$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

——— ∞ ———

Problema 6.7. Dada la función $f(x) = 2x + a + \frac{b}{x}$, calcula a y b de modo que f pase por el punto $(-2, -6)$ y tenga tangente horizontal en ese punto.

Solución.

Como f pasa por el punto $(-2, -6)$, se debe cumplir:

$$f(-2) = 2(-2) + a + \frac{b}{-2} = -6,$$

$$a - \frac{b}{2} = -6 + 4 = -2.$$

Si f tiene tangente horizontal, entonces en ese punto la pendiente debe anularse:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h) + a + b/(x+h) - 2x - a - b/x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h - bh/(x^2 + hx)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(2 - \frac{bh}{(x^2+hx)h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(2 - \frac{b}{(x^2+hx)}\right) = 2 - \frac{b}{x^2} = 0,$$

y ahora evaluando la pendiente para el valor $x = -2$ se tiene:

$$m = 2 - \frac{b}{(-2)^2} = 0,$$

$$b = 8,$$

que sustituyendo en

$$a - \frac{b}{2} = -2$$

permite obtener el valor de a:

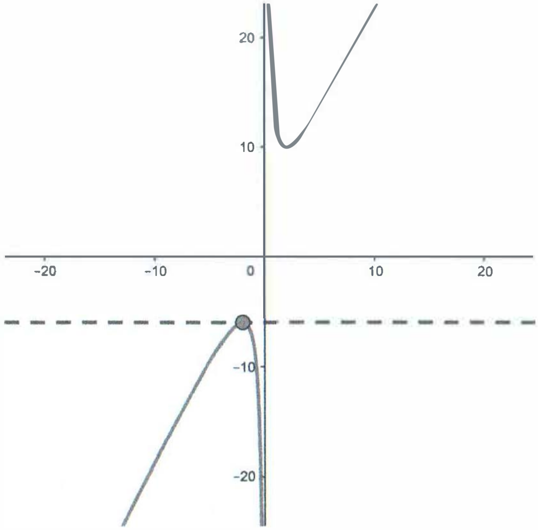
$$a - \frac{8}{2} = a - 4 = -2 \Rightarrow a = 2.$$

Con lo que la función buscada es

$$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}.$$

Véase Figura 6.1.

Figura 6.1: Recta tangente



—— ∞ ——

Problema 6.8. Halla la derivada en el punto indicado de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 + 2$ en $x = 0$ **b)** $f(x) = x^3$ en $x = 0$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$ en $x = 1$

Solución.

a) $f(x) = 2x^2 + 2x$ en $x = 0$

Aplicando la definición de la derivada en un punto se tiene

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Luego se tiene para el punto $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\left(2(0+h)^2 + 2(0+h)\right) - (2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} 2h + 2 = 2.$$

b) $f(x) = x^3$ en $x = 0$

Aplicando la definición de la derivada se tiene:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^3 - 0^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 = 0.$$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$ en $x = 1$

Aplicando la definición de la derivada se tiene:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+h)-1} - \sqrt[5]{1-1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-4/5} = \infty.$$

Es decir, no existe $f'(1)$. La recta tangente a la curva en $x = 1$ es perpendicular al eje OX. La función no es derivable en $x = 1$.

——— ∞ ———

Problema 6.9. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto indicado:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 6$ en $x = 0$ b) $f(x) = 3\sqrt{x}$ en $x = 9$

Solución.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 6$ en $x = 0$

La derivada de la función viene dada por

$$f'(x) = 2x + 2.$$

Al evaluar en el punto $x = 0$, se obtiene la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en ese punto,

$$f'(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \Longrightarrow m = 2.$$

El punto de tangencia tiene como coordenada $x = 0$ y se determina la coordenada $y = f(0)$:

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 6 = 6.$$

Luego el punto de tangencia tiene coordenadas (0,6).

La recta pedida pasa por el punto de coordenadas $(0, 6)$ y tiene pendiente $m = 2$.

Sustituyendo en la expresión punto pendiente de la recta,

$$y = mx + b,$$

se obtiene:

$$y = 2x + b.$$

Como pasa por el punto $(0, 6)$:

$$6 = 2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 6,$$

la recta tangente será

$$y = 2x + 6.$$

Véase Figura 6.2 a).

b) $f(x) = 3\sqrt{x}$ en $x = 9$

La derivada de la función viene dada por

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

Al evaluar en el punto $x = 9$, se obtiene la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en ese punto,

$$f'(9) = \frac{3}{2\sqrt{9}} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \Longrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

El punto de tangencia tiene como coordenada $x = 9$ y se determina la coordenada $y = f(9)$:

$$f(9) = 3\sqrt{9} = 3 \cdot 3 = 9.$$

Luego el punto de tangencia tiene coordenadas $(9, 9)$.

La recta pedida pasa por el punto de coordenadas $(9, 9)$ y tiene pendiente $m = \frac{1}{2}$.

Sustituyendo en la expresión punto pendiente de la recta se obtiene:

$$y = \frac{1}{2}x + b.$$

Como pasa por el punto $(9, 9)$:

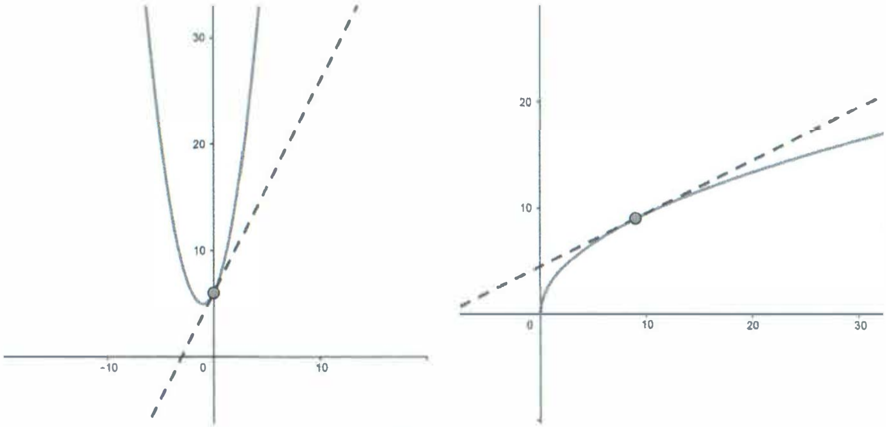
$$9 = \frac{1}{2} \cdot 9 + b \Rightarrow b = \frac{9}{2},$$

la recta tangente será

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}.$$

Véase Figura 6.2 b).

Figura 6.2: Funciones y su recta tangente en un punto



a) $f(x) = x^2 + 2x + 6$ en $x = 0$ b) $f(x) = 3\sqrt{x}$ en $x = 9$

——— ∞ ———

Problema 6.10. Estudia la derivabilidad de $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

Solución.

Para ser derivable en un punto la función ha de ser continua en el punto. Para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$ debe cumplir las siguientes tres condiciones:

i) Existe $f(0) = |0| = 0$.

ii) Existen y son iguales los límites laterales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Luego existe el límite de la función en el punto indicado.

iii) $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0.$

Luego la función es continua en el punto $x = 0$.

Para comprobar que una función es derivable en un punto se ha de comprobar que existen las derivadas laterales y son iguales, es decir $f'(0^-) = f'(0^+)$.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La derivada por la izquierda se calcula como:

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

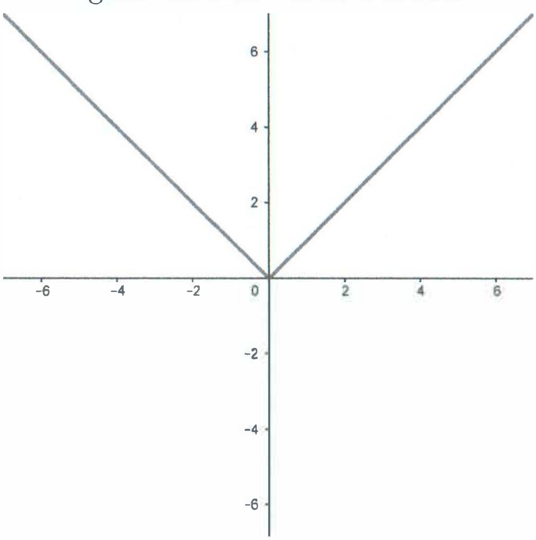
La derivada por la derecha se calcula como:

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1.$$

Como $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$, f no es derivable en $x = 0$.

Véase Figura 6.3.

Figura 6.3: Función no derivable



$f(x) = |x|$ en $x = 0$.

—— ∞ ——

Problema 6.11. Halla las derivadas laterales de las siguientes funciones en los puntos que se especifican:

a) $f(x) = x^2 + x$ en $x = 2$ **b)** $f(x) = |2x|$ en $x = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

Solución.

a) $f(x) = x^2 + x$ en el punto $x = 2$.

Se halla la derivada lateral por la derecha de la función en el punto solicitado:

$$f'\left(2^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f\left(2+h\right) - f\left(2\right)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{4 + 4h + h^2 + 2 + h - 4 - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} h + 5 = 5.$$

Se halla la derivada lateral por la izquierda de la función en el punto solicitado:

$$f'\left(2^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f\left(2+h\right) - f\left(2\right)}{h} = \lim_{h \to 0^-} h + 5 = 5.$$

Como las derivadas parciales existen y son iguales, entonces la función es derivable en el punto $x = 2$, y su valor es 5.

b) $f(x) = |2x|$ en el punto $x = 0$.

Se hallan las derivadas laterales de la función en el punto solicitado:

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f\left(0+h\right) - f\left(0\right)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|2h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = 2.$$

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f\left(0+h\right) - f\left(0\right)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|2h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-2h}{h} = -2.$$

Como las derivadas laterales en el punto solicitado $x = 0$ no son iguales, entonces se concluye que la función no es derivable en ese punto.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

Se hallan las derivadas laterales de la función en el punto solicitado:

$$f'\left(1^-\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(1+h\right) - f\left(1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+h\right)^2 + 4 - \left(1^2+4\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0} h + 2 = 2.$$

$$f'\left(1^+\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(1+h\right) - f\left(1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+h\right) + 4 - \left(1^2+4\right)}{h},$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Como $f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$, f no es derivable en $x = 1$.

——— ∞ ———

Problema 6.12. Dada la función $f(x) = x^3$, comprueba si es derivable y/o continua en el punto $x = 1$.

Solución.

Se halla la derivada de la función en el punto:

$$f'\left(1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(1+h\right) - f\left(1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(3+3h+h^2\right) = 3.$$

y como el límite existe y es finito entonces $f'(1) = 3$.

Como la función es derivable en el punto, entonces la función es continua en dicho punto.

Nota: Lo normal es probar que sea continua para comprobar luego si es derivable.

——— ∞ ———

Problema 6.13. Dada la función $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$, comprueba si es derivable y continua en el punto $x = 2$.

Solución.

Se escribe la función como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty, -2] \\ -x^2 + 4 & \text{si } x \in (-2, 2) \\ x^2 - 4 & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Se estudia la continuidad en el punto $x = 2$.

i) Existe $f(2) = 0$.

ii) Existen los límites laterales y son iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2^2 - 4 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -2^2 + 4 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 0.$$

iii) El valor de la función y el límite coinciden,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 2$.

Para estudiar la derivabilidad en $x = 2$, se aplica la definición de derivada:

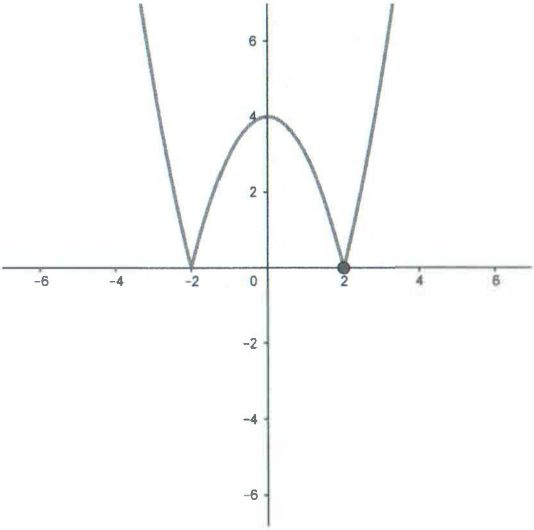
$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2 - 4 - 0}{h} \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{-(2+h)^2 + 4 - 0}{h} \end{cases}$$

$$f'(2) = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} h + 4 = 4 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{-h^2 - 4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} (-h - 4) = -4 \end{cases}$$

Como las derivadas laterales son distintas, se concluye que la función no es derivable en el punto.

Véase Figura 6.4.

Figura 6.4: Continuidad y derivabilidad



$f(x) = |x^2 - 4|$

———— ∞ ————

Problema 6.14. Halla las derivadas de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada en los puntos indicados:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$, en $x = 0$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$, en $x = 1$

Solución.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$, en $x = 0$

La definición de derivada en un punto es

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2 - 6(0+h) + 2 - (0^2 - 6\cdot 0 + 2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 6h + 2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 6h}{h} = \lim_{h\to 0} h - 6 = -6. \end{aligned}$$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$, en $x = 1$

Aplicando la definición de derivada:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f\,(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1+h}{1+h-3} - \dfrac{1}{1-3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{2h(h-2)} = \lim_{h\to 0} \frac{3}{2(h-2)} = \frac{-3}{4}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.15. Halla la derivada de la siguiente función en el punto $x = 0$ aplicando la definición de derivada en un punto.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{x-3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solución.

Se deja al lector la comprobación de la continuidad de la función.

Para estudiar la derivabilidad se tendrá en cuenta que:

Si $h > 0 \Rightarrow 0 + h > 0 \Rightarrow f(0+h) = (0+h)^3$, luego

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0} \frac{f\,(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^3 - (0)^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 = 0.$$

Si $h < 0 \Rightarrow 0 + h < 0 \Rightarrow f(0+h) = \dfrac{0+h}{0+h-3} = \dfrac{h}{h-3}$, luego

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0} \frac{f\,(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h}{h-3} - 0^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h-3} = \frac{-1}{3}.$$

Como las derivadas laterales son distintas, no existe $f'\,(0)$.

——— ∞ ———

Problema 6.16. Halla las derivadas de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$ **d)** $f(x) = (x^3 - 4)^2$

Solución.

a) $f(x) = x^2$

Como la función es de la forma $f(x) = x^n$, su derivada es

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Por tanto,

$$f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x.$$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

En primer lugar, se reescribe la función radical en forma de potencias y luego se deriva como en el caso anterior:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3},$$

$$f'(x) = (1/3) \cdot x^{(1/3)-1} = (1/3)x^{-(2/3)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

En primer lugar, se reescribe la función radical en forma de potencias y luego se deriva como en el caso anterior:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = x^{-1/5},$$

$$f'(x) = -(1/5) \cdot x^{-(1/5)-1} = -(1/5)x^{-(6/5)} = \frac{-1}{5x\sqrt[5]{x}}.$$

d) $f(x) = (x^3 - 4)^2$

Como la función es de la forma $f(x) = [g(x)]^n$, se tiene que su derivada será de la forma:

$$f'(x) = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

Sean

$$g(x) = \left(x^3 - 4\right),\ n = 2 \text{ y } g'(x) = 3x^2,$$

por tanto,

$$f'(x) = 2 \cdot \left(x^3 - 4\right) \cdot 3x^2 = 6x^2(x^3 - 4).$$

——— ∞ ———

Problema 6.17. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = x^{4/3}$.

Solución.

a) $f(x) = x^4$

$$f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3.$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$

$$f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}.$$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = x^{4/3}$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{(4/3)-1} = \frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.18. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^6 + x^2$ b) $f(x) = (x^5 + x - 1)(x^2 + 2x)$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4 + 1}$

Solución.

a) $f(x) = x^6 + x^2$

Sean $f_1(x) = x^6$ y $f_2(x) = x^2$, luego se está ante la derivada de una suma que es igual a la suma de las derivadas:

$$(f_1(x) + f_2(x))' = f_1'(x) + f_2'(x),$$

$$f_1'(x) = 6x^{6-1} = 6x^5,$$

$$f_2'(x) = 2x^{2-1} = 2x,$$

$$f'(x) = (f_1(x) + f_2(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) = 6x^5 + 2x.$$

b) $f(x) = (x^5 + x - 1)(x^2 + 2x)$

Sean $f_1(x) = (x^5 + x - 1)$ y $f_2(x) = (x^2 + 2x)$, y se está ante la derivada de un producto:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x),$$

$$f_1'(x) = 5x^{5-1} + 1x^{1-1} - 0 = 5x^4 + 1,$$

$$f_2'(x) = 2x^{2-1} + 2x^{1-1} = 2x + 2.$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$f'(x) = \left(5x^4 + 1\right)(x^2 + 2x) + (x^5 + x - 1)(2x + 2)$$

$$= 5x^6 + 10x^5 + x^2 + 2x + 2x^6 + 2x^5 + 2x^2 + 2x - 2x - 2.$$

$$f'(x) = 7x^6 + 12x^5 + 3x^2 + 2x - 2.$$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4 + 1}$

Sean $f_1(x) = x^3$ y $f_2(x) = (x^4 + 1)$, y se está ante la derivada de un cociente:

$$\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right)' = \frac{f_1'(x)\, f_2(x) - f_1(x)\, f_2'(x)}{[f_2(x)]^2},$$

$$f_1'(x) = 3x^2,$$

$$f_2'(x) = 4x^3,$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^4 + 1) - x^3 4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{3x^6 + 3x^2 - 4x^6}{(x^4 + 1)^2} = \frac{-x^6 + 3x^2}{(x^4 + 1)^2}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.19. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_2 x$ **b)** $f(x) = \log_5 x^2$ **c)** $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 + 1}{x + 1}\right)$

Solución.

a) $f(x) = \log_2 x$

La función es de la forma $f(x) = \log_a x$, y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}.$$

b) $f(x) = \log_5 x^2$

La función es de la forma $f(x) = \log_a u(x)$, y su derivada es

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)\ln a},$$

por tanto,

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 \ln 5} = \frac{2}{x \ln 5}.$$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

La función es de la forma $f(x) = \ln u(x)$, y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{u(x)}u'(x),$$

por tanto,

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)} \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)(x+1)}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.20. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3\ln x + 4x^2$ b) $f(x) = 5\ln x \cdot (x^2 - 3x^4)$

c) $f(x) = \log_3 x \cdot 4\ln x$

Solución.

a) $f(x) = 3\ln x + 4x^2$

Sean $f_1(x) = 3\ln x$ y $f_2(x) = 4x^2$, luego

$$f_1'(x) = 3\frac{1}{x} = \frac{3}{x},$$

$$f_2'(x) = 8x,$$

$$f'(x) = \frac{3}{x} + 8x.$$

b) $f(x) = 5\ln x \cdot (x^2 - 3x^4)$

Sean $f_1(x) = 5\ln x$ y $f_2(x) = (x^2 - 3x^4)$, luego

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{5}{x}, \\ f_2'(x) &= 2x - 12x^3, \\ f'(x) &= \frac{5}{x}(x^2 - 3x^4) + 5\ln x\left(2x - 12x^3\right) \\ &= 5x - 15x^3 + 5\ln x\left(2x - 12x^3\right). \end{aligned}$$

c) $f(x) = \log_3 x \cdot 4\ln x$

Sean $f_1(x) = \log_3 x$ y $f_2(x) = 4\ln x$, luego

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{1}{x\ln 3}, \\ f_2'(x) &= \frac{4}{x}, \\ f'(x) &= \frac{1}{x\ln 3} 4\ln x + \log_3 x\left(\frac{4}{x}\right), \end{aligned}$$

y como

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3},$$

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln 3} 4\ln x + \frac{\ln x}{\ln 3}\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{8\ln x}{x\ln 3}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.21. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2\ln\left(x^2\right)$ **b)** $f(x) = 4\ln(x^3 - 3x^2)$

Solución.

a) $f(x) = 2\ln\left(x^2\right)$

Sean $g(x) = 2\ln x$ y $h(x) = x^2$, luego

$$\begin{aligned} \left[g\left(h\left(x\right)\right)\right]' &= g'\left(h\left(x\right)\right)h'\left(x\right), \\ g'(h(x)) &= 2\frac{1}{h(x)} = \frac{2}{x^2}, \\ h'(x) &= 2x, \end{aligned}$$

$$f'(x) = \left[g\left(h\left(x\right)\right)\right]' = g'\left(h\left(x\right)\right)h'\left(x\right) = \frac{2}{x^2}2x = \frac{4}{x}.$$

b) $f(x) = 4\ln(x^3 - 3x^2)$

Sean $g(x) = 4\ln x$ y $h(x) = (x^2 - 2x)$, luego

$$f'(x) = g'(h(x))\,h'(x) = \frac{4\left(3x^2 - 6x\right)}{(x^3 - 3x^2)} = \frac{12x - 24}{(x^2 - 3x)}.$$

———— ∞ ————

Problema 6.22. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x\ln x$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(3x+1)}$ c) $f(x) = \log_2(1 + 2^{-x})$

Solución.

a) $f(x) = x\ln x$

$$f'(x) = 1\ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(3x+1)}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x\ln(3x+1) - x^2\left(\dfrac{3}{3x+1}\right)}{\ln^2(3x+1)} \\ &= \frac{2x(3x+1)\ln(3x+1) - 3x^2}{(3x+1)\ln^2(3x+1)}. \end{aligned}$$

c) $f(x) = \log_2(1 + 2^{-x})$

La función es de la forma $f(x) = \log_a u(x)$, por tanto:

$$f'(x) = \frac{(-1)2^{-x}\ln 2}{(1 + 2^{-x})\ln 2} = \frac{-2^{-x}}{(1 + 2^{-x})} = \frac{-1}{(1 + 2^{x})}.$$

———— ∞ ————

Problema 6.23. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 2x}$

c) $f(x) = (x^3 - 5)^{10}\sqrt{x^2 - 1}$ d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^5 - 3x}{7x + 4}}$

e) $f(x) = \left(\dfrac{x+5}{\sqrt{7x+3}}\right)^3$

Solución.

a) $f(x)=\sqrt{x^3+2x^2}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x^3+2x^2\right)^{(1/2)-1}\cdot(3x^2+4x)=\frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2}}.$$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x^2+2x}$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-3)\cdot(x^2+2x)-(x^3-3x)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x)^2}$$

$$=\frac{x^2\left[x^2+4x+3\right]}{x^2\left(x+2\right)^2}=\frac{\left(x^2+4x+3\right)}{\left(x+2\right)^2}.$$

c) $f(x)=(x^3-5)^{10}\sqrt{x^2-1}$

$$f'(x)=30x^2(x^3-5)^9\sqrt{x^2-1}+\left(x^3-5\right)^{10}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^5-3x}{7x+4}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^5-3x}{7x+4}\right)^{(1/2)-1}\cdot\frac{(5x^4-3)(7x+4)-(x^5-3x)(7)}{(7x+4)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{7x+4}{x^5-3x}}\frac{2(7x^5+5x^4-3)}{(7x+4)^2}.$$

e) $f(x)=\left(\dfrac{x+5}{\sqrt{7x+3}}\right)^3$

$$f'(x)=3\cdot\left(\frac{x+5}{\sqrt{7x+3}}\right)^{3-1}\cdot\frac{\sqrt{7x+3}-(x+5)\dfrac{7}{2\sqrt{7x+3}}}{\left(\sqrt{7x+3}\right)^2}$$

$$=\frac{3(x+5)^2}{7x+3}\cdot\frac{2(7x+3)-7(x+5)}{2\sqrt{7x+3}(7x+3)}=\frac{3(x+5)^2(7x-29)}{2(7x+3)^2\sqrt{7x+3}}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = 3x^3 + \sqrt[3]{x+1}$, en $x = 0$ b) $f(x) = x\sqrt{1-x}$, en $x = 1$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{5x^2}$, en $x = -2$

Solución.

a) $f(x) = 3x^3 + \sqrt[3]{x+1}$, en $x = 0$

La derivada de la función viene dada por

$$f'(x) = 9x^2 + \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}.$$

Y sustituyendo en la derivada x por 0:

$$f'(0) = 9 \cdot 0^2 + \frac{1}{3}(0+1)^{-2/3} = \frac{1}{3}.$$

b) $f(x) = x\sqrt{1-x}$, en $x = 1$

La derivada de la función viene dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{1-x} + x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

Se observa que $f'(1)$ no existe, pues la expresión obtenida no está definida en $x = 1$.

c) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{5x^2}$, en $x = -2$

La derivada de la función viene dada por

$$f'(x) = \frac{(4x+5)5x^2 - (2x^2+5x-3)10x}{(5x^2)^2}$$

$$= \frac{20x^3+25x^2-20x^3-50x^2+30x}{(5x^2)^2} = \frac{-25x^2+30x}{25x^4} = \frac{-5x+6}{5x^3}.$$

Y sustituyendo en la derivada x por -2:

$$f'(-2) = \frac{-5\cdot(-2)+6}{5(-2)^3} = -\frac{16}{40} = -\frac{2}{5}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.25. Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x-1}}$ y sea $f^{-1}(x) = \dfrac{x^5+1}{x^5}$. Halla las derivadas de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$ y halla las pendientes de la gráfica de f en el punto $(0,-1)$ y de la gráfica de f^{-1} en el punto $(-1,0)$.

Solución.

Reescribiendo $f(x)$ se tiene $f(x) = (x-1)^{(-1/5)}$. La derivada de la función f es

$$f'(x) = -\frac{1}{5}(x-1)^{(-1/5)-1} = -\frac{1}{5}(x-1)^{(-6/5)}$$
$$= \frac{-1}{5(x-1)\sqrt[5]{x-1}}.$$

Derivando f^{-1}:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{5x^4x^5 - \left(x^5+1\right)5x^4}{x^{10}} = \frac{-5x^4}{x^{10}} = \frac{-5}{x^6}.$$

La pendiente de la gráfica de f es el valor de la derivada en $x=0$:

$$f'(0) = \frac{-1}{-5\sqrt[5]{-1}} = \frac{-1}{5}.$$

La pendiente de la gráfica de f^{-1} es el valor de la derivada en $x=-1$:

$$\left(f^{-1}\right)'(-1) = \frac{-5}{1} = -5.$$

Y como se puede comprobar las pendientes son recíprocas.

——— ∞ ———

Problema 6.26. Halla la derivada de la función $y = f(x)$ en los siguientes casos:

a) $y^5 - y^3 - x^2 - x = 1$ **b)** $x^2 \text{sen} xy + x = 3$

Solución.

a) $y^5 - y^3 - x^2 - x = 1$

Se trata de una función en forma implícita, $F(x,y) = c$. Para hallar su derivada se han de dar los siguientes pasos:

i) Se halla la derivada a ambos lados de la ecuación respecto de x, utilizando la notación $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{d}{dx}\left(y^5 - y^3 - x^2 - x\right) = \frac{d}{dx}(1),$$

$$5y^4\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} - 2x - 1 = 0.$$

ii) Se agrupan todos los términos de $\dfrac{dy}{dx}$ en la parte izquierda de la ecuación y el resto se lleva a la parte derecha

$$5y^4\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = 2x + 1.$$

iii) Se saca factor común a $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}(5y^4 - 3y^2) = 2x + 1.$$

iv) Se despeja $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{5y^4 - 3y^2}.$$

b) $x^2 \text{sen} xy + x = 3$

Se trata de una función dada en forma implícita y por tanto:

i) Se halla la derivada a ambos lados de la igualdad:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \text{sen} xy + x\right) = \frac{d}{dx}(3),$$

$$2x\text{sen} xy + x^2\frac{d}{dx}(xy)\cos xy + 1 = 0,$$

$$2x\text{sen} xy + x^2\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)\cos xy + 1 = 0.$$

ii) Se agrupan los términos en los que aparece $\dfrac{dy}{dx}$:

$$x^3\cos xy\frac{dy}{dx} = -2x\text{sen} xy - x^2y - 1.$$

iii) Se despeja $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x\text{sen}xy + x^2y + 1)}{x^3\cos xy}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.27. Halla la derivada de las siguientes funciones aplicando la derivación logarítmica:

a) $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{\sqrt{x^3-1}}$ **b)** $f(x) = x^{3x^2+2x}$

Solución.

a) $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{\sqrt{x^3-1}}$

i) Se iguala la función a y:

$$y = \frac{(x+2)^3}{\sqrt{x^3-1}}.$$

ii) Se toman logaritmos neperianos a ambos lados de la igualdad:

$$\ln y = \ln\frac{(x+2)^3}{\sqrt{x^3-1}}.$$

iii) Por las propiedades de los logaritmos, se tiene:

$$\ln y = \ln\frac{(x+2)^3}{\sqrt{x^3-1}} = \ln(x+2)^3 - \ln\sqrt{x^3-1}$$

$$\ln y = \ln(x+2)^3 - \ln(x^3-1)^{1/2}.$$

Y ahora por la regla de la potencia de los logaritmos:

$$\ln y = \ln(x+2)^3 - \ln(x^3-1)^{1/2} = 3\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x^3-1).$$

iv) Se derivan ambos lados de la igualdad

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+2} - \frac{3x^2}{2(x^3-1)}$$

$$= \frac{6x^3-6-3x^3-6x^2}{2(x+2)(x^3-1)} = \frac{3x^3-6x^2-6}{2(x+2)(x^3-1)}.$$

v) Se despeja y' que es la derivada buscada en un principio

$$y' = y\left(\frac{3x^3 - 6x^2 - 6}{2(x+2)(x^3-1)}\right) = \frac{(x+2)^3}{\sqrt{x^3-1}} \frac{3x^3 - 6x^2 - 6}{2(x+2)(x^3-1)}$$
$$= \frac{(x+2)^2(3x^3-6x^2-6)}{\sqrt{(x^3-1)^3}}.$$

b) $f(x) = x^{3x^2+2x}$

i) Se iguala la función a y, $y = x^{3x^2+2x}$.

ii) Se toman logaritmos neperianos a ambos lados de la igualdad

$$\ln y = \ln x^{3x^2+2x}.$$

iii) Por las propiedades de los logaritmos, se tiene:

$$\ln y = (3x^2 + 2x) \ln x.$$

iv) Se derivan ambos lados de la igualdad

$$\frac{y'}{y} = (6x+2)\ln x + \frac{3x^2+2x}{x}.$$

v) Se despeja y' que es la derivada buscada en un principio

$$y' = y\left((6x+2)\ln x + 3x + 2\right)$$
$$= x^{3x^2+2x}\left((6x+2)\ln x + 3x + 2\right).$$

——— ∞ ———

Problema 6.28. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = u(x)^{v(x)}$ b) $f(x) = x^{3x+2}$ c) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

Solución.

a) $f(x) = u(x)^{v(x)}$

Para calcular la derivada de este tipo de funciones, $y = u^v$, se siguen los siguientes pasos:

i) Se iguala la función a y, $y(x) = u(x)^{v(x)}$.

ii) Se toman logaritmos neperianos a ambos lados de la igualdad

$$\ln y = \ln u^v.$$

iii) Por las propiedades de los logaritmos

$$\ln y = v \ln u.$$

iv) Se derivan ambos lados de la igualdad

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}.$$

v) Se despeja y'

$$y' = y\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

b) $f(x) = x^{3x+2}$

i) Se iguala la función a y

$$y(x) = x^{3x+2}.$$

ii) Se toman logaritmos neperianos

$$\ln y = \ln x^{3x+2}.$$

iii) Por las propiedades de los logaritmos

$$\ln y = (3x+2)\ln x.$$

iv) Se derivan ambos lados de la igualdad

$$\frac{y'}{y} = 3\ln x + (3x+2)\frac{1}{x}.$$

v) Se despeja y'

$$y' = y\left(3\ln x + \frac{(3x+2)}{x}\right) = x^{3x+2}\left(3\ln x + \frac{(3x+2)}{x}\right).$$

c) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

i) Se iguala la función a y

$$y(x) = x^{\sqrt{x}}.$$

ii) Se toman logaritmos neperianos

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}}.$$

iii) Se aplican las propiedades de los logaritmos

$$\ln y = \sqrt{x} \ln x.$$

iv) Se derivan ambos lados de la igualdad

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x}.$$

v) Se despeja y' que es la derivada buscada en un principio

$$y' = y\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right).$$

——— ∞ ———

Problema 6.29. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (\sqrt{x})^{x^2-1}$ **b)** $y(x) = (\ln x)^x$ **c)** $y(x) = \left(x^2 + 5x\right)^{\ln x}$

Solución.

a) $f(x) = (\sqrt{x})^{x^2-1}$

i) Se iguala la función a y

$$y(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{x^2-1}.$$

ii) Se toman logaritmos neperianos

$$\ln y = \ln \left(\sqrt{x}\right)^{x^2-1}.$$

iii) Se aplican las propiedades de los logaritmos

$$\ln y = (x^2 - 1) \ln \sqrt{x}.$$

iv) Se derivan ambos lados de la igualdad

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \sqrt{x} + (x^2 - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= 2x \ln \sqrt{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

v) Se despeja y'

$$y' = y\left(2x \ln \sqrt{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}\right)$$

$$= \left(\sqrt{x}\right)^{x^2-1}\left(2x \ln \sqrt{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}\right).$$

b) $y(x) = (\ln x)^x$

i) La función ya viene igualada a y

$$y = (\ln x)^x .$$

ii) Se toman logaritmos

$$\ln y = \ln (\ln x)^x .$$

iii) Se aplican las propiedades de los logaritmos

$$\ln y = x \ln (\ln x) .$$

iv) Se derivan ambos lados de la igualdad

$$\frac{y'}{y} = 1 \ln (\ln x) + x\left(\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\right) = \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x}.$$

v) Se despeja y'

$$y' = y\left(\ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right) = (\ln x)^x \left(\ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right).$$

c) $y(x) = \left(x^2 + 5x\right)^{\ln x}$

i) Se iguala la función a y

$$y = \left(x^2 + 5x\right)^{\ln x} .$$

ii) Se toman logaritmos neperianos

$$\ln y = \ln \left(x^2 + 5x\right)^{\ln x} .$$

iii) Se aplican las propiedades de los logaritmos

$$\ln y = \ln x \ln\left(x^2 + 5x\right).$$

iv) Se derivan ambos lados de la igualdad

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\ln\left(x^2+5x\right) + \ln x\left(\frac{2x+5}{x^2+5x}\right).$$

v) Se despeja y'

$$\begin{aligned} y' &= y\left(\frac{1}{x}\ln\left(x^2+5x\right) + \ln x\left(\frac{2x+5}{x^2+5x}\right)\right) \\ &= \left(x^2+5x\right)^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln\left(x^2+5x\right) + \ln x\left(\frac{2x+5}{x^2+5x}\right)\right). \end{aligned}$$

——— ∞ ———

Problema 6.30. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4e^x + 5e^{3x}$ **b)** $f(x) = e^{3x} + e^x$ **c)** $f(x) = 2^x + 5e^{2x}$

d) $f(x) = 5e^{(2x^4-3x^3)}$ **e)** $f(x) = 2^x e^{2x}$

Solución.

a) $f(x) = 4e^x + 5e^{3x}$

$$f'(x) = 4e^x + 15e^{3x}.$$

b) $f(x) = e^{3x} + e^x$

$$f'(x) = 3e^{3x} + e^x.$$

c) $f(x) = 2^x + 5e^{2x}$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + 10e^{2x}.$$

d) $f(x) = 5e^{(2x^4-3x^3)}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(2x^4-3x^3)'e^{(2x^4-3x^3)} \\ &= 5\left(8x^3-9x^2\right)e^{(2x^4-3x^3)} = \left(40x^3-45x^2\right)e^{(2x^4-3x^3)}. \end{aligned}$$

e) $f(x) = 2^x e^{2x}$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 e^{2x} + 2^x 2 e^{2x} = (\ln 2 + 2) 2^x e^{2x}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.31. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5^{x^2+3x-8}$ b) $f(x) = 6e^{(x-5)^3}$ c) $f(x) = 2^{7x^2-x}$

Solución.

a) $f(x) = 5^{x^2+3x-8}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 + 3x - 8\right)' \cdot 5^{x^2+3x-8} \ln 5 \\ &= (2x+3) \cdot 5^{x^2+3x-8} \ln 5. \end{aligned}$$

b) $f(x) = 6e^{(x-5)^3}$

$$f'(x) = 6(3(x-5)^2) e^{(x-5)^3} = 18(x-5)^2 e^{(x-5)^3}.$$

c) $f(x) = 2^{7x^2-x}$

$$f'(x) = (14x - 1) \cdot 2^{7x^2-x} \ln 2\ .$$

——— ∞ ———

Problema 6.32. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3 \cdot 5^{x+\ln x}$ b) $f(x) = 2e^{(x+1)} 2^{-x}$ c) $f(x) = \dfrac{e^{x^2-1}}{7^{x^2+1}}$

Solución.

a) $f(x) = 3 \cdot 5^{x+\ln x}$

$$f'(x) = 3\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot 5^{x+\ln x} \ln 5.$$

b) $f(x) = 2e^{(x+1)}2^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{(x+1)}2^{-x} + 2e^{(x+1)}(-1)2^{-x}\ln 2 \\ &= 2^{(1-x)}e^{(x+1)}(1-\ln 2). \end{aligned}$$

c) $f(x) = \dfrac{e^{x^2-1}}{7^{x^2+1}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2xe^{(x^2-1)}7^{(x^2+1)} - e^{x^2-1}2x7^{(x^2+1)}\ln 7}{\left(7^{(x^2+1)}\right)^2} \\ &= \frac{2xe^{(x^2-1)}7^{(x^2+1)}(1-\ln 7)}{\left(7^{(x^2+1)}\right)^2} = \frac{2xe^{(x^2-1)}(1-\ln 7)}{7^{(x^2+1)}}. \end{aligned}$$

——— ∞ ———

Problema 6.33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = e^x + \sqrt[3]{x^3-1}$ en $x=0$

b) $f(x) = \ln(x^2) + \sqrt{x^2+1}$ en $x=1$

Solución.

a) $f(x) = e^x + \sqrt[3]{x^3-1}$, en $x=0$

La derivada de la función viene dada por:

$$f'(x) = e^x + \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}.$$

Y sustituyendo en la derivada x por 0:

$$f'(0) = e^0 + \frac{0}{\sqrt[3]{(0-1)^2}} = 1.$$

b) $f(x) = \ln(x^2) + \sqrt{x^2+1}$, en $x=1$

La derivada de la función viene dada por:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Y sustituyendo en la derivada x por 1:

$$f'(1) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.34. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ **b)** $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 2x)$ **c)** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Solución.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$

Como la función es de la forma $f(x) = \operatorname{sen} u(x)$, se tiene que su derivada es de la forma:

$$f'(x) = u'(x) \cos u(x),$$

por tanto,

$$f'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x).$$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 2x)$

$$f'(x) = \cos(x^2 + 2x) \cdot (2x + 2).$$

c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen}(2x).$$

——— ∞ ———

Problema 6.35. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x^3)$ **b)** $f(x) = \cos(x^3 + 2x^2)$ **c)** $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$

Solución.

a) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x^3)$

$$f'(x) = 2\operatorname{sen}(x^3) \cdot \cos(x^3) 3x^2 = 3x^2 \operatorname{sen}(2x^3).$$

b) $f(x) = \cos(x^3 + 2x^2)$

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x^3 + 2x^2) \cdot (3x^2 + 4x).$$

c) $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)\cdot(\cos x) - (1+\operatorname{sen} x)\cdot(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.36. Halla la derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos 4x - \operatorname{sen} 2x$ **b)** $f(x) = \tan(\cos x)$ **c)** $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

Solución.

a) $f(x) = \cos 4x - \operatorname{sen} 2x$

$$f'(x) = -4\operatorname{sen} 4x - 2\cos 2x.$$

b) $f(x) = \tan(\cos x)$

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2(\cos x)}.$$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.37. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $y(x) = \sec\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$ **b)** $y(x) = \left[1-(1-\sec x)^2\right]^3$

c) $y(x) = \dfrac{\tan(x-5)}{25-x^2}$

Solución.

a) $y(x) = \sec\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$

Como la función es de la forma $f(x) = \sec u(x)$, se tiene que su derivada es de la forma:

$$f'(x) = \sec u(x) \tan u(x) u'(x),$$

por tanto,

$$\begin{aligned} y' &= \sec\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) \tan\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{1\cdot\sqrt{x} - (x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}\right) \\ &= \sec\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) \tan\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

b) $y(x) = \left[1 - (1-\sec x)^2\right]^3$

$$\begin{aligned} y' &= 3\left[1 - (1-\sec x)^2\right]^2 \cdot (-2(1-\sec x)\sec x \tan x) \\ &= -6\left[1 - (1-\sec x)^2\right]^2 \cdot ((1-\sec x)\sec x \tan x). \end{aligned}$$

c) $y(x) = \dfrac{\tan(x-5)}{25-x^2}$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\sec^2(x-5)\cdot(25-x^2) - (\tan(x-5))\cdot(-2x)}{(25-x^2)^2} \\ &= \frac{(25-x^2)\sec^2(x-5) + 2x(\tan(x-5))}{(25-x^2)^2}. \end{aligned}$$

———— ∞ ————

Problema 6.38. Halla la derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \arccos(3x+2)$ **b)** $f(x) = \arctan(\cos x)$

c) $f(x) = \operatorname{arcsen}(3x^2 + x)$

Solución.

a) $f(x) = \arccos(3x+2)$

$$f'(x) = \frac{(3x+2)'}{\sqrt{1-(3x+2)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}.$$

b) $f(x) = \arctan(\cos x)$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}.$$

c) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(3x^2+x)$

$$f'(x) = \frac{\left(3x^2+x\right)'}{\sqrt{1-(3x^2+x)^2}} = \frac{6x+1}{\sqrt{1-(3x^2+x)^2}}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.39. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(3-x^3)$ b) $f(x) = 5\arccos(1-x^2)$

c) $f(x) = x\operatorname{arc\,sen}(\ln x)$

Solución.

a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(3-x^3)$

Como la función es de la forma $f(x) = \operatorname{arc\,sen} u(x)$, se tiene que su derivada es de la forma:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}},$$

por tanto,

$$y' = \frac{-3x^2}{\sqrt{1-(3-x^3)^2}}.$$

b) $f(x) = 5 \operatorname{arc\,cos}(1 - x^2)$

Como la función es de la forma $f(x) = \operatorname{arc\,cos} u(x)$, se tiene que su derivada es de la forma:

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}},$$

por tanto,

$$y' = \frac{-5(-2x)}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} = \frac{10x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = \frac{10}{\sqrt{2-x^2}}.$$

c) $f(x) = x \operatorname{arc\,sen}(\ln x)$

$$y' = 1 \cdot \operatorname{arc\,sen}(\ln x) + x\frac{1/x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \operatorname{arc\,sen}(\ln x) + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

—— ∞ ——

Problema 6.40. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $f(x) = \ln\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ **b)** $f(x) = \left[\operatorname{arc\,sen}(x^2-1)\right]^3$

c) $f(x) = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{x+5}{\sqrt{x}}\right)$

Solución.

a) $f(x) = \ln\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

La función es de la forma $f(x) = \ln u(x)$, y por tanto:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{(-1/x^2)}{\sqrt{1-(1/x)^2}}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{(-1)}{x^2\sqrt{(x^2-1)/x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

b) $f(x) = \left[\operatorname{arc\,sen}(x^2-1)\right]^3$

$$y' = 3\left[\operatorname{arc\,sen}(x^2-1)\right]^2 \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}$$
$$= \frac{6x\left[\operatorname{arc\,sen}(x^2-1)\right]^2}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \frac{6\left[\operatorname{arc\,sen}(x^2-1)\right]^2}{\sqrt{2-x^2}}.$$

c) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x+5}{\sqrt{x}}\right)$

La función es de la forma $f(x) = \arccos u(x)$, luego

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+5}{\sqrt{x}}\right)^2}} \frac{-\left(\sqrt{x}-(x+5)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-(x+5)^2}{x}}} \frac{-(2x-(x+5))}{2x\sqrt{x}} = \frac{5-x}{2x\sqrt{x-(x+5)^2}}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.41. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $y(x) = \arccos^3(e^x)$ b) $y(x) = \arccos\left(\ln x - x^2\right)$

c) $y(x) = \arctan\left(\dfrac{x+1}{e^x}\right)$

Solución.

a) $y(x) = \arccos^3(e^x)$

$$y' = 3\arccos^2(e^x)\frac{-e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = \frac{-3e^x\arccos^2(e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

b) $y(x) = \arccos\left(\ln x - x^2\right)$

$$y' = \frac{-\left(\dfrac{1}{x}-2x\right)}{\sqrt{1-(\ln x - x^2)^2}}$$

$$= \frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1 - (\ln x - x^2)^2}}.$$

c) $y(x) = \arctan\left(\dfrac{x+1}{e^x}\right)$

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x+1}{e^x}\right)^2}\left(\frac{e^x - (x+1)e^x}{(e^x)^2}\right)$$

$$= \frac{(e^x)^2}{e^{2x} + (x+1)^2}\frac{-xe^x}{(e^x)^2} = \frac{-xe^x}{e^{2x} + (x+1)^2}.$$

—— ∞ ——

Problema 6.42. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $y(x) = \arctan(\operatorname{sen} x)$ **b)** $y(x) = (x^2 + 5x)\arctan(-x)$

c) $y(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen}(x^2 - 4)}{\arccos(x^2 - 4)}$

Solución.

a) $y(x) = \arctan(\operatorname{sen} x)$

$$y' = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}.$$

b) $y(x) = (x^2 + 5x)\arctan(-x)$

$$y' = (2x+5)\arctan(-x) + (x^2 + 5x)\frac{-1}{1 + (-x)^2}$$

$$= (2x+5)\arctan(-x) - \frac{x^2 + 5x}{1 + x^2}.$$

c) $y(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen}(x^2 - 4)}{\arccos(x^2 - 4)}$

$$y' = \frac{\dfrac{2x\arccos(x^2 - 4)}{\sqrt{1 - (x^2 - 4)^2}} - \dfrac{\operatorname{arcsen}(x^2 - 4)(-2x)}{\sqrt{1 - (x^2 - 4)^2}}}{(\arccos(x^2 - 4))^2}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-4)^2}} \frac{\arccos\left(x^2-4\right)+\operatorname{arcsen}\left(x^2-4\right)}{\left(\arccos\left(x^2-4\right)\right)^2}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.43. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $y(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ **b)** $y(x) = \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $y(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-9}+\dfrac{11}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)$

Solución.

a) $y(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Como la función es de la forma $f(x) = \ln(u(x))$, con

$$u(x) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

se tiene que

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}}$$

$$\cdot \frac{\operatorname{sen} x(1+\cos x)-(1-\cos x)(-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} \frac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x\cos x}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{(1+\cos x)}{2(1-\cos x)}\frac{2\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

b) $y(x) = \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \frac{\sqrt{1-x^2}-x\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}} \frac{\dfrac{2\left(1-x^2\right)+2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(1-x^2\right)}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} \frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-x^2}{1} \frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

c) $y(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} + \frac{11}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)$

Derivando cada uno de los sumandos se tiene:

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-9} +$$

$$+ \frac{x}{2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} + \frac{11}{2}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-9}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}\right)$$

$$= \frac{x^2-9+x^2}{2\sqrt{x^2-9}} + \frac{11}{2}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-9}}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}+x}{\sqrt{x^2-9}}\right)$$

$$= \frac{2x^2-9}{2\sqrt{x^2-9}} + \frac{11}{2\sqrt{x^2-9}}$$

$$= \frac{2x^2+2}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-9}}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.44. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $y(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

b) $y(x) = 3x^5 - x^3 + 2x$

c) $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x + 1$

d) $y(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

e) $y\left(x\right) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

Solución.

a) $y(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

$$y'(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2x = 3x^2 + 6x.$$

b) $y(x) = 3x^5 - x^3 + 2x$

$$y'(x) = 15x^4 - 3x^2 + 2.$$

c) $y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x + 1$

$$y'(x) = \frac{1}{4}4x^3 + \frac{1}{3}3x^2 + 2 = x^3 + x^2 + 2.$$

d) $y(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$y'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{-1}{x^2} - \frac{\sqrt{x}}{2x}.$$

e) $y(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.45. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $y(x) = 2\sqrt{x} + 4x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **b)** $y(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + x^3 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

c) $y(x) = (3x + 2)(5x - 1)$ **d)** $y(x) = x(2x + 5)(x - 7)$

e) $y(x) = 4(x - 3)(x + 5)$

Solución.

a) $y(x) = 2\sqrt{x} + 4x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$$y'(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} + 4 - 2\frac{-1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + 4 + \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

b) $y(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + x^3 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(x^{-2} - 2x^{-1/2} + x^3 - x^{-1/3}\right)' \\ &= -2x^{-1} - 2\frac{-1}{2}x^{-3/2} + 3x^2 - \frac{-1}{3}x^{-4/3} \\ &= \frac{-2}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + 3x^2 + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

c) $y(x) = (3x+2)(5x-1)$

$$y'(x) = 3(5x-1) + (3x+2)5 = 30x + 7.$$

d) $y(x) = x(2x+5)(x-7)$

$$\begin{aligned} y'(x) &= 1 \cdot (2x+5)(x-7) + x2(x-7) + x(2x+5) \\ &= 6x^2 - 18x - 35. \end{aligned}$$

e) $y(x) = 4(x-3)(x+5)$

$$y'(x) = 4(x+5) + 4(x-3) = 8x + 8 = 8(x+1).$$

——— ∞ ———

Problema 6.46. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $y(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$ b) $y(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ c) $y(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

d) $y(x) = \dfrac{2x+3}{x}$ e) $y(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{2}$

Solución.

a) $y(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$

$$y'(x) = \frac{(x+3)-(x-2)}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2}.$$

b) $y(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

$$y'(x) = \frac{2(x-3) - 2x}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}.$$

c) $y(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

$$y'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}.$$

d) $y(x) = \dfrac{2x+3}{x}$

$$y'(x) = \frac{2x - (2x+3)}{x^2} = \frac{-3}{x^2}.$$

e) $y(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{2}$

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+2x+1\right)' = \frac{1}{2}(2x+2) = x+1.$$

——— ∞ ———

Problema 6.47. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $y(x) = (x+7)^{25}$ b) $y(x) = (x^2+2x+3)^{11}$ c) $y(x) = \left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^5$

d) $y(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{3x+5}}$ e) $y(x) = \dfrac{1}{(x^2-2x)^6}$ f) $y(x) = \dfrac{(x+1)^5}{(2x+3)^3}$

Solución.

a) $y(x) = (x+7)^{25}$

$$y'(x) = 25(x+7)^{24}.$$

b) $y(x) = (x^2+2x+3)^{11}$

$$y'(x) = 11(x^2+2x+3)^{10}(2x+2).$$

c) $y(x) = \left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^5$

$$y'(x) = 5\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^4 \frac{x-3-(x+5)}{(x-3)^2} = 5\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^4 \frac{-8}{(x-3)^2}$$

$$= -\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^4 \frac{40}{(x-3)^2}.$$

d) $y(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{3x+5}}$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x+5}}}\left(\frac{2x-1}{3x+5}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x+5}}}\left(\frac{2\,(3x+5)-(2x-1)\,3}{(3x+5)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x+5}}}\left(\frac{13}{(3x+5)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x+5}{2x-1}}\left(\frac{13}{(3x+5)^2}\right).$$

e) $y\,(x) = \dfrac{1}{(x^2-2x)^6}$

$$y'\,(x) = \frac{-1}{\left[(x^2-2x)^6\right]^2}\left[(x^2-2x)^6\right]'$$

$$= \frac{-1}{(x^2-2x)^{12}}6\,(x^2-2x)^5\,(2x-2)$$

$$= \frac{-6}{(x^2-2x)^7}\,(2x-2)$$

$$= \frac{-12\,(x-1)}{(x^2-2x)^7}.$$

f) $y(x) = \dfrac{(x+1)^5}{(2x+3)^3}$

$$y'(x) = \frac{5(x+1)^4(2x+3)^3 - (x+1)^5\,3(2x+3)^2\,2}{(2x+3)^6}$$
$$= \frac{(x+1)^4(5(2x+3) - (x+1)6)}{(2x+3)^4}$$
$$= \left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^4(4x+9).$$

——— ∞ ———

Problema 6.48. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $y(x) = \operatorname{sen}\left(x^2+2x+3\right)$ **b)** $y(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$

c) $y(x) = \tan\sqrt{x}$ **d)** $y(x) = \ln\left(\cos^2 x\right)$

e) $y(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$

Solución.

a) $y(x) = \operatorname{sen}\left(x^2+2x+3\right)$

$$y'(x) = (2x+2)\cos\left(x^2+2x+3\right).$$

b) $y(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen} x^2$

$$y'(x) = -2\cos x\operatorname{sen} x + 2x\cos x^2.$$

c) $y(x) = \tan\sqrt{x}$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2\sqrt{x}.$$

d) $y(x) = \ln\left(\cos^2 x\right)$

$$y'(x) = \frac{-2\cos x\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{-2\operatorname{sen} x}{\cos x} = -2\tan x.$$

e) $y(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}.$$

——— ∞ ———

Problema 6.49. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $y(x) = \sqrt{\cos x}$

b) $y(x) = 2^{\sqrt{x}}$

c) $y(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

d) $y(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x}$

e) $y(x) = \operatorname{sen}^2\left(e^{3x}\right)$

Solución.

a) $y(x) = \sqrt{\cos x}$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\left(-\operatorname{sen} x\right) = \frac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

b) $y(x) = 2^{\sqrt{x}}$

$$y'(x) = 2^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln 2.$$

c) $y(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

$$y'(x) = \frac{1}{\dfrac{1+e^x}{1-e^x}}\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)' = \frac{1-e^x}{1+e^x}\,\frac{e^x\left(1-e^x\right) - \left(-e^x\right)\left(1+e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2}$$

$$y'(x) = \frac{e^x\left(1-e^x+1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)\left(1-e^x\right)} = \frac{e^x\,(2)}{\left(1+e^x\right)\left(1-e^x\right)}$$

$$y'(x) = \frac{2e^x}{\left(1-e^{2x}\right)}.$$

d) $y(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x}$

$$y'(x) = 2\cos x \operatorname{sen} x e^{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{sen}(2x)\, e^{\operatorname{sen}^2 x}.$$

e) $y(x) = \operatorname{sen}^2\left(e^{3x}\right)$

$$y'(x) = 3e^{3x} 2 \operatorname{sen}\left(e^{3x}\right)\cos\left(e^{3x}\right)$$
$$y'(x) = 6e^{3x} \operatorname{sen}\left(2e^{3x}\right).$$

——— ∞ ———

Problema 6.50. Calcula la derivada de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $y(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt[5]{x^4}}{2\sqrt[3]{2x^2}}$ **b)** $y(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$

c) $y(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}}$ **d)** $y(x) = \log_2\sqrt{x^4+7x^2+5}$

e) $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}e^{3x} + \cos^2 x^3$

Solución.

a) $y(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt[5]{x^4}}{2\sqrt[3]{2x^2}}$

Se reescribe la expresión en forma de potencias:

$$y(x) = \frac{\sqrt{x}\sqrt[5]{x^4}}{2\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{x^{1/2}x^{4/5}}{2\sqrt[3]{2}x^{2/3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}x^{19/30},$$

y se deriva:

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\frac{19}{30}x^{\frac{19}{30}-1} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\frac{19}{30}x^{-11/30}.$$

b) $y(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}.$$

c) $y(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}}$

$$y(x) = \left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{1/3}$$

$$y'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{-2/3}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)'$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{-2/3}\left(\frac{-\sec^2 x\,(1+\tan x) - \sec^2 x\,(1-\tan x)}{(1+\tan x)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{-2/3}\left(\frac{-2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}\right).$$

d) $y(x) = \log_2 \sqrt{x^4 + 7x^2 + 5}$

$$y'(x) = \frac{1}{(\ln 2)\sqrt{x^4+7x^2+5}}\left(\sqrt{x^4+7x^2+5}\right)'$$

$$= \frac{1}{(\ln 2)\sqrt{x^4+7x^2+5}}\frac{4x^3+14x}{2\sqrt{x^4+7x^2+5}}$$

$$= \frac{2\left(2x^3+7x\right)}{2\,(\ln 2)\left(\sqrt{x^4+7x^2+5}\right)^2}$$

$$= \frac{2x^3+7x}{(\ln 2)\left(x^4+7x^2+5\right)}.$$

e) $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}e^{3x} + \cos^2 x^3$

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}3e^{3x} + 3x^2 2\cos x^3 \operatorname{sen} x^3$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}e^{3x} + 3x^2 \operatorname{sen}\left(2x^3\right).$$

——— ∞ ———

Problema 6.51. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = |x|\,(x-1)$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2+6 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x+2 & \text{si } 2 < x \leq 6 \\ (x-4)^3 & \text{si } 6 < x \leq 20 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-e^x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in (1,+\infty) \end{cases}$

Solución.

a) $f(x) = |x|\,(x-1)$

Se expresa la función como:

$$f(x) = \begin{cases} x\,(x-1) & \text{si } x \geq 0 \\ -x\,(x-1) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-x & \text{si } x \geq 0 \\ x-x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La expresión de la función es siempre un polinomio y, por tanto, es continua en todos los puntos, salvo tal vez en $x=0$. Además, la función en esos puntos es derivable.

Para estudiar la continuidad en $x=0$ se tiene:

i) Existe $f(0) = 0^2 - 0 = 0$.

ii) Los límites laterales son

$$\lim_{x\to 0^-} x - x^2 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 - x = 0,$$

luego existe el límite en cero

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

iii) El valor del límite y la función coinciden,

$$f(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

Para ver si la función es derivable en $x = 0$ se aplica la definición de derivada en un punto, ya que en el resto del dominio viene expresada como un polinomio.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 - 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se halla la derivada lateral por la derecha de la función en $x = 0$:

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - h}{h} = \lim_{h \to 0^+} h - 1 = -1.$$

Se halla la derivada lateral por la izquierda de la función en $x = 0$:

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h - h^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} 1 - h = 1.$$

Como las derivadas laterales son distintas, la función no es derivable en $x = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } 2 < x \leq 6 \\ (x - 4)^3 & \text{si } 6 < x \leq 20 \end{cases}$

La función está definida a trozos en el intervalo $(-2, 20]$ mediante polinomios. Por tanto, la función es continua en cada uno de los intervalos: $(-2, 2]$, $(2, 6]$ y $(6, 20]$.

Se estudia, a continuación, lo que ocurre en los extremos de los intervalos:

- En $x = 2$

  i) $f(2) = -4 + 6 = 2$.

  ii) Existencia de límite

$$\lim_{x \to 2^-} -x^2 + 6 = 2,$$

$$\lim_{x \to 2^+} x + 2 = 4.$$

Como los límites laterales son distintos, no existe límite en el punto, existe una discontinuidad de salto en $x = 2$.

- En $x = 6$

  i) $f(6) = 6 + 2 = 8$.

  ii) Existencia de límite

$$\lim_{x \to 6^-} x + 2 = 8,$$

$$\lim_{x \to 6^+} (x-4)^3 = 8.$$

  Como los límites laterales son iguales, existe límite en el punto:

$$\lim_{x \to 6} f(x) = 8.$$

  iii) Como $f(6) = 8 = \lim_{x \to 6} f(x)$, la función es continua en el punto $x = 6$.

- En $x = 20$

  i) $f(20) = (20-4)^3 = 16^3$.

  ii) Existencia de límite

$$\lim_{x \to 20^-} (x-4)^3 = 16^3.$$

  iii) Como $f(20) = 16^3 = \lim_{x \to 20^-} f(x)$, la función es continua en el punto $x = 20$ por la izquierda.

A continuación, se estudia la derivabilidad. Sabemos que la función es derivable en los intervalos: $(-2, 2)$, $(2, 6)$ y $(6, 20)$ ya que viene definida por polinomios. En $x = 2$ la función no es continua y, por tanto, no puede ser derivable. Solo queda analizar la continuidad en $x = 6$.

Se hallan las derivadas laterales en el punto:

$$f'\left(6^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f\,(6+h) - f\,(6)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(6+h-4)^3 - 8}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^2 + 6h + 12 = 12.$$

$$f'\left(6^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f\,(6+h) - f\,(6)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(6+h+2) - 8}{h} = 1.$$

Como $f'\left(6^-\right) = 0 \neq f'\left(6^+\right) = 12$, la función no es derivable en $x = 6$.

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-e^x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- Si $x \neq 0$, la función es un cociente de funciones continuas y, por tanto, es continua ya que el denominador solo se anula en $x = 0$.
- Si $x = 0$, se estudia la continuidad:

i) Existe $f(0) = 0$.

ii) El límite en $x = 0$ se obtiene aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{-e^x} = -1.$$

iii) El valor del límite y la función no coinciden,

$$f(0) = 0 \neq \lim_{x \to 0} f(x) = -1,$$

luego la función no es continua en $x = 0$ y por tanto, tampoco es derivable en ese punto.

En el resto del dominio, la función es derivable por ser composición de funciones derivables.

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in (1,+\infty) \end{cases}$

Se trata de una función a trozos, que es continua en el intervalo $[0,1]$ por ser un polinomio, así como en el intervalo $(1,+\infty)$ por ser cociente de polinomios cuyo denominador no se anula en el mencionado intervalo.

Por tanto, queda comprobar la continuidad en el punto $x = 1$.

i) Existe $f(1) = 1^2 = 1$.

ii) Existen y son iguales los límites laterales,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1/x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1,$$

luego existe el límite de la función en el punto indicado.

iii) Y por i) y ii) se tiene que:

$$f(1) = 1 = \lim_{x \to 1} f(x).$$

Luego, la función es continua en $x = 1$, y por tanto en todo el dominio de definición.

A continuación, se estudia la derivabilidad. Se sabe que la función es derivable en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ por ser las funciones en esos intervalos derivables.

En $x = 1$ se hallan las derivadas laterales en el punto:

$$f'\left(1^{+}\right) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^{+}} \frac{-1}{1+h} = -1.$$

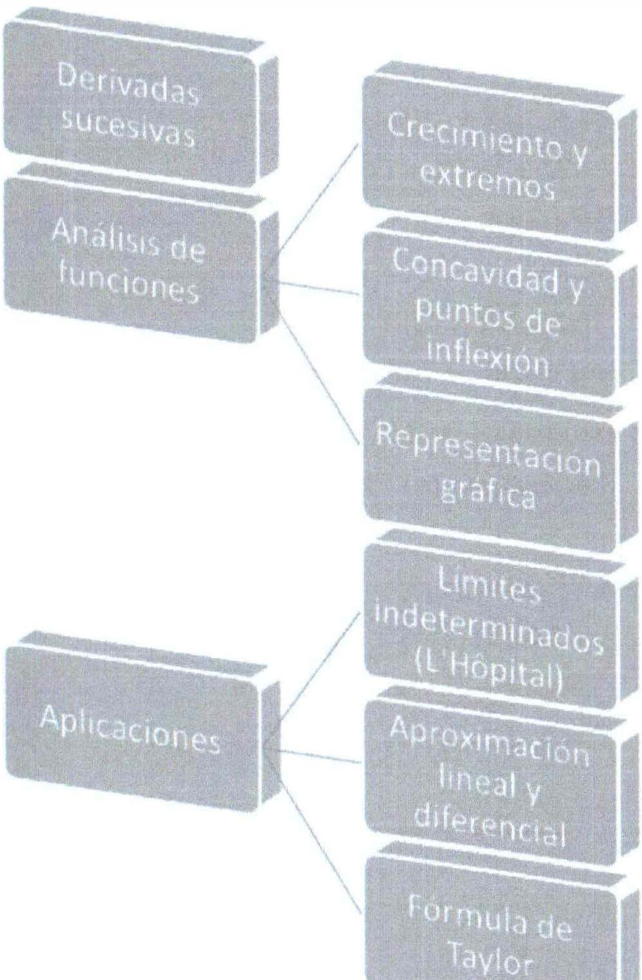
$$f'\left(1^{-}\right) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{(1+h)^{2} - 1}{h} = 2.$$

Como $f'(1^{-}) = 2 \neq f'(1^{+}) = -1$, la función no es derivable en $x = 1$.

——— ∞ ———

Capítulo 7

Aplicaciones de la derivada



Problema 7.1. Halla la derivada cuarta de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 5x^2$ b) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$

c) $f(x) = 4e^{3x}$

Solución.

a) $f(x) = 3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 5x^2$

$$f'(x) = 15x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 10x$$

$$f''(x) = 60x^3 + 24x^2 - 24x + 10$$

$$f'''(x) = 180x^2 + 48x - 24$$

$$f^{iv)}(x) = 360x + 48.$$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$

$$f'(x) = 3\cos(3x)$$

$$f''(x) = -9\operatorname{sen}(3x)$$

$$f'''(x) = -27\cos(3x)$$

$$f^{iv)}(x) = 81\operatorname{sen}(3x).$$

c) $f(x) = 4e^{3x}$

$$f'(x) = 12e^{3x}$$

$$f''(x) = 36e^{3x}$$

$$f'''(x) = 108e^{3x}$$

$$f^{iv)}(x) = 324e^{3x}.$$

——— ∞ ———

Problema 7.2. Halla las derivadas sucesivas de las siguientes funciones hasta que se anulen:

a) $f(x) = 7x^2 - 5x + 7$ b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 9$

c) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 7$

Solución.

a) $f(x) = 7x^2 - 5x + 7$

Las derivadas sucesivas de un polinomio a partir de la derivada de orden igual al grado del polinomio son todas nulas. Por tanto, en este caso, solo hay que hallar las derivadas primera y segunda:

$$f'(x) = 14x - 5$$

$$f''(x) = 14$$

$$f'''(x) = f^{iv)}(x) = \ldots = f^{n)}(x) = 0.$$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 9$

El grado del polinomio es 3, luego las derivadas cuarta y siguientes se anulan, es decir, valen 0.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{iv)}(x) = f^{v)}(x) = \ldots = f^{n)}(x) = 0.$$

c) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 7$

El grado del polinomio es 4, por tanto, las derivadas quinta y siguientes son 0.

$$f'(x) = 8x^3 - 6x$$

$$f''(x) = 24x^2 - 6$$

$$f'''(x) = 48x$$

$$f^{iv)}(x) = 48$$

$$f^{v)}(x) = \ldots = f^{n)}(x) = 0.$$

——— ∞ ———

Problema 7.3. Halla la derivada n-ésima de la función $f(x) = e^{nx}$.

Solución.

$$f'(x) = ne^{nx}$$
$$f''(x) = nne^{nx} = n^2e^{nx}$$
$$f'''(x) = n^2ne^{nx} = n^3e^{nx}$$
$$\vdots$$
$$f^{n)}(x) = n^n e^{nx}.$$

——— ∞ ———

Problema 7.4. Estudia el crecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ b) $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 14)$

c) $f(x) = \dfrac{-(x^2+4)}{2x}$ d) $f(x) = \dfrac{-3x}{x-4}$

Solución.

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento vienen delimitados por puntos en los que no existe la función o por puntos en los que la derivada es igual a 0.

En primer lugar, se estudia cuál es el dominio de la función, y como la función es un polinomio, su dominio es el conjunto de los números reales.

$$\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}.$$

En segundo lugar, se calcula la derivada de la función

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

y se iguala la derivada 0,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Obteniéndose de esta forma los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$(-\infty, -1), (-1, 1) \text{ y } (1, \infty).$$

A continuación, se determina el signo de la derivada en cada uno de los intervalos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Por tanto, la función es:

Creciente en los intervalos: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

Decreciente en el intervalo: $(-1,1)$.

b) $f(x)=e^x(x^2-7x+14)$

En primer lugar, se estudia cuál es el dominio de la función, que vendrá dado por todos los puntos en que existe la función

$$\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}.$$

En segundo lugar, se calcula la derivada de la función

$$f'(x)=e^x(x^2-7x+14)+e^x(2x-7)=$$

$$=e^x(x^2-5x+7).$$

Se puede comprobar que ninguno de los factores se anula para cualquier valor de x :

$$f'(x)>0\ \forall x\in \mathrm{Dom}\,(f),$$

entonces se puede asegurar que la función $f(x)$ es creciente en todo su dominio.

c) $f(x)=\dfrac{-(x^2+4)}{2x}$

El dominio de $f(x)$, al ser un cociente de polinomios, es todo $\mathbb{R}$ a excepción de aquellos valores que anulan el denominador, por tanto:

$$\mathrm{Dom}\,(f)=\{x\in\mathbb{R}/2x\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, se halla la derivada:

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot 2x-(-(x^2+4))\cdot 2}{(2x)^2}=\frac{4-x^2}{2x^2}=\frac{(2-x)(2+x)}{2x^2}$$

y, a continuación, se iguala la derivada a 0,

$$f'(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{2x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Por tanto, los intervalos a estudiar son

$$(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2) \text{ y } (2, \infty).$$

Se evalúa el signo de la primera derivada en los citados intervalos y se tiene:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$2+x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Por tanto, la función es:

Creciente en los intervalos: $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

Decreciente en los intervalos: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

d) $f(x) = \dfrac{-3x}{x-4}$

El dominio de $f(x)$ es

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 4\} = \mathbb{R} \backslash \{4\}.$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, se halla la derivada:

$$f'(x) = \frac{-3(x-4) - (-3x)}{(x-4)^2} = \frac{12}{(x-4)^2}$$

y, a continuación, se iguala a 0,

$$f'(x) = \frac{12}{(x-4)^2} \neq 0$$

Como la derivada es siempre positiva, la función es creciente en todo el dominio, es decir, es creciente en los intervalos: $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

∞

Problema 7.5. Estudia el crecimiento de las funciones:

a) $f(x) = 4 - \dfrac{x}{x^2}$ b) $f(x) = x^4 - 6x^2$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

Solución.

a) $f(x) = 4 - \dfrac{x}{x^2}$

El dominio de la función es

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}/x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, se calcula su derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

De donde se tiene que

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f).$$

Luego la función $f(x)$ es creciente en todo su dominio.

b) $f(x) = x^4 - 6x^2$

El dominio de la función es

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

Para determinar los intervalos de crecimiento, se deriva la función:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3).$$

Para determinar los intervalos de crecimiento, se iguala la derivada a cero para obtener los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array} \right.$$

A continuación, se determina el signo de la derivada en cada uno de los intervalos:

	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+\sqrt{3}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Por tanto, la función es:

Creciente en los intervalos: $\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},\infty\right)$.

Decreciente en los intervalos: $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$.

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$

En primer lugar, se estudia cuál es el dominio de la función:

$$\text{Dom}\,(f)=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

Luego se calcula la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}.$$

Se iguala la primera derivada a 0 para estudiar los puntos críticos que determinen los intervalos de crecimiento.

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2(2x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=3/2\end{cases}$$

A continuación, se determina el signo de la derivada en cada uno de los intervalos:

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,3/2)$	$(3/2,+\infty)$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Por tanto, la función es:

Creciente en: $(-\infty,0))\cup(3/2,\infty)$.

Decreciente en: $(0,1)\cup(1,3/2)$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

El dominio de la función es:

$$\mathrm{Dom}\,(f) = \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}.$$

La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Se iguala la derivada 0, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son:

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1) \text{ y } (1, \infty)$$

A continuación, se evalúa la derivada en cada uno de los intervalos, teniendo en cuenta que el denominador siempre es positivo:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

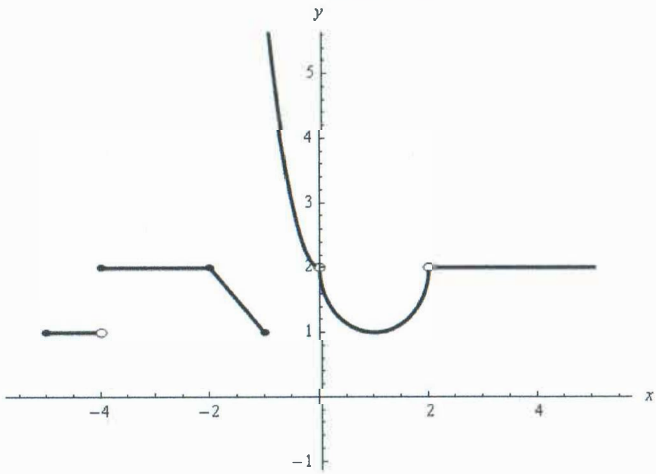
Por tanto, la función es:

Creciente en: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

Decreciente en: $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

——— ∞ ———

Figura 7.1: Intervalos de crecimiento en una función a trozos



Problema 7.6. Dada la función $f(x)$ definida a trozos, cuya gráfica se representa en la Figura 7.1, estudia el crecimiento y decrecimiento en el intervalo $[-5, 3]$ y obtén el signo de la derivada en cada subintervalo.

Solución.

De acuerdo a la gráfica, podemos observar los siguientes intervalos: $(-5, -4)$, $(-4, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 3)$. Se estudia cada intervalo:

- En el intervalo $(-5, -4)$, la función es constante, luego $f'(x) = 0$.
- En el intervalo $(-4, -2)$, la función es constante, $f'(x) = 0$.
- En el intervalo $(-2, -1)$, la función es decreciente, $f'(x) < 0$.
- En el intervalo $(-1, 0)$, la función es decreciente, $f'(x) < 0$.
- En el intervalo $(0, 1)$, la función es decreciente, $f'(x) < 0$.
- En el intervalo $(1, 2)$, la función es creciente, $f'(x) > 0$.
- En el intervalo $(2, 3)$, la función es constante, $f'(x) = 0$.

——— ∞ ———

Problema 7.7. Halla los extremos locales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ **b)** $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7$

Solución.

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$

Como es una función polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$, luego se puede aplicar el criterio de la primera derivada.

Por el problema 7.4 se conocen la primera derivada, los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Como en $x = -1$ la función pasa de creciente a decreciente, hay un máximo en el punto $(-1, 1)$, y como en $x = 1$ pasa de decreciente a creciente, hay un mínimo en el punto $(1, -3)$. Véase Figura 7.2 a).

Por el criterio de la segunda derivada, se halla la segunda derivada y se evalúan los puntos críticos:

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Máximo.}$$

$$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7$

Como es una función polinómica, se sabe que es continua en todo su domino. Se puede aplicar el criterio de la primera derivada para hallar extremos locales.

i) Hallar la derivada de la función $f'(x)$.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12.$$

ii) Igualar la derivada a 0, $f'(x) = 0$, y obtener los valores que serán los puntos críticos.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ x = -1,\ \text{y } x = 3$$

$$f'(x) = (x-1)(x+1)(x-3).$$

iii) Establecer los intervalos que quedan definidos por los puntos críticos.

$$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, 3) \text{ y } (3, \infty).$$

iv) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento en cada intervalo.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

v) Si hay cambio de sentido del crecimiento entre intervalos contiguos, entonces hay extremo relativo en ese punto. Por tanto, como la función pasa de decreciente a creciente en el punto $x = -1$, existe un mínimo en el punto $(-1, -16)$. Como pasa de creciente a decreciente en el punto $x = 1$, hay un máximo en el punto $(1, 0)$. Y como pasa de decreciente a creciente en el punto $x = 3$, hay otro mínimo en el punto $(3, -16)$. Véase Figura 7.2 b).

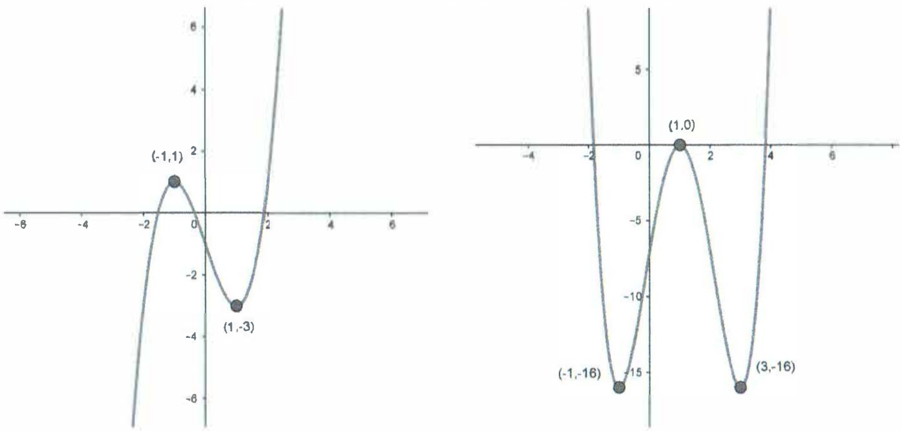
También se podría haber utilizado el criterio de la segunda derivada. Así, una vez hallada la primera derivada y obtenidos los puntos críticos, hay que hallar la segunda derivada:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4.$$

Y evaluar la segunda derivada para los puntos críticos:

$$f''(-1) = 32 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$
$$f''(1) = -16 < 0 \Rightarrow \text{Máximo.}$$
$$f''(3) = 32 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$

Figura 7.2: Máximos y mínimos locales



a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ b) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7$

∞

Problema 7.8. Halla los extremos locales de las funciones:

a) $f(x) = x^4(1-x)^3$ **b)** $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 14)$

c) $f(x) = \dfrac{-(x^2+4)}{2x}$

Solución.

a) $f(x) = x^4(1-x)^3$

Por el criterio de la primera derivada hay que:

i) Hallar la derivada de la función.

$$f'(x) = 4x^3(1-x)^3 - 3x^4(1-x)^2 = x^3(1-x)^2(4-7x).$$

ii) Igualar la derivada a 0, $f'(x) = 0$, y obtener los puntos críticos.

$$f'(x) = x^3(1-x)^2(4-7x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1,\ \text{y } x = \frac{4}{7}.$$

iii) Establecer los intervalos a estudiar.

$$(-\infty, 0)\,,\ \left(0, \frac{4}{7}\right),\ \left(\frac{4}{7}, 1\right) \text{ y } (1, \infty)\,.$$

iv) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento en cada intervalo.

	$(-\infty,0)$	$\left(0,\frac{4}{7}\right)$	$\left(\frac{4}{7},1\right)$	$(1,\infty)$
x^3	$-$	$+$	$+$	$+$
$(1-x)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$4-7x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

v) Como la función pasa de decreciente a creciente en el punto $x = 0$, existe un mínimo en el punto $(0,0)$. Como pasa de creciente a decreciente en el punto $x = 4/7$, hay un máximo en el punto $(4/7, 6912/823433)$. Y como a la izquierda y a la derecha del punto $x = 1$ es decreciente, entonces no hay mínimo ni máximo.

b) $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 14)$

Por el Problema 7.4 esta función es creciente en todo su dominio, luego no tiene extremos locales, ni máximos, ni mínimos.

c) $f(x) = \dfrac{-(x^2+4)}{2x}$

Por el Problema 7.4 se conocen la primera derivada, los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{2x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Como para $x=-2$, la función pasa de decreciente a creciente, hay un mínimo en el punto $(-2,2)$, y como para $x=2$, pasa de creciente a decreciente, hay un máximo en el punto $(2,-2)$. En $x=0$ no está definida la función ni su derivada.

Por el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-2x2x^2-(4-x^2)4x}{4x^4} = \frac{-4x^3-16x+4x^3}{4x^4} = \frac{-4}{x^3}$$

$$f''(-2) = \frac{-4}{(-2)^3} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$

$$f''(2) = \frac{-4}{(2)^3} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2} < 0 \Rightarrow \text{Máximo.}$$

——— ∞ ———

Problema 7.9. Halla los extremos locales de las funciones:

a) $f(x) = 4 - \dfrac{x}{x^2}$ b) $f(x) = x^4 - 6x^2$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

Solución.

a) $f(x) = 4 - \dfrac{x}{x^2}$

Para esta función, se tiene por el Problema 7.5 que es creciente en todo su dominio, luego no tiene extremos locales, ni máximos, ni mínimos.

b) $f(x) = x^4 - 6x^2$

Por el Problema 7.5 se tienen los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Luego se puede asegurar que:

- para $x = -\sqrt{3}$ la función pasa de decreciente a creciente, por tanto, hay un mínimo en el punto $(-\sqrt{3}, -9)$,
- para $x = 0$ pasa de creciente a decreciente, por tanto, hay un máximo en el punto $(0, 0)$ y
- para $x = \sqrt{3}$ pasa de decreciente a creciente, por tanto, hay un mínimo en el punto $(\sqrt{3}, -9)$.

Alternativamente, por el criterio de la segunda derivada, se halla la segunda derivada y se evalúan los puntos críticos:

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$
$$f''(-\sqrt{3}) = 24 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$
$$f''(0) = -12 < 0 \Rightarrow \text{Máximo.}$$
$$f''(\sqrt{3}) = 24 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$

Por el problema 7.5 se tienen los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3/2 \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3/2)$	$(3/2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Luego:

- para el punto $x = 0$, no hay cambio, no existe extremo local.
- para $x = 3/2$, la función pasa de decreciente a creciente, hay un mínimo en el punto $(3/2, 27/4)$.

Alternativamente, por el criterio de la segunda derivada, se halla la segunda derivada y se evalúan los puntos críticos:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow \text{No se sabe.}$$

$$f''(3/2) = 18 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Por el problema 7.5 se tienen los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Como en $x = 0$ la función pasa de creciente a decreciente, hay un máximo en el punto $(0, -1)$.

Por el criterio de la segunda derivada, se halla la segunda derivada y se evalúan los puntos críticos:

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo.}$$

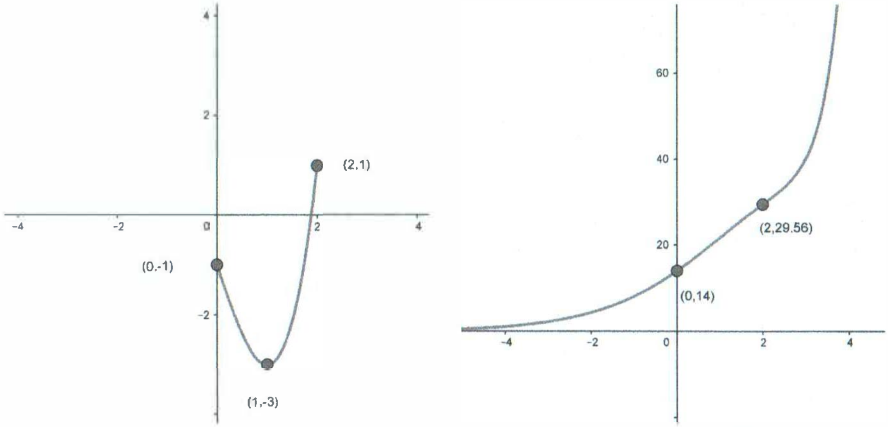
——— ∞ ———

Problema 7.10. Estudia los extremos absolutos de las funciones siguientes en el intervalo [0,2]:

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ **b)** $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 14)$

Solución.

Figura 7.3: Extremos locales y absolutos



a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ b) $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 14)$

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$

Se aplica el método de los extremos absolutos:

i) Obtener los puntos críticos de la función. Por el problema 7.8 se tiene $x = 1$.

ii) Hallar los extremos locales, lo que se ha hallado anteriormente, encontrándose un mínimo en el punto $(1, -3)$.

iii) Evaluar la función en los extremos del intervalo, y se tiene:

$$f(0) = -1$$
$$f(2) = 1.$$

iv) El mayor de los valores de la función obtenido para los extremos locales y los extremos de los intervalos será el máximo absoluto en el intervalo, y de forma análoga el menor de los valores de la función, el mínimo absoluto.

Como

$$f(1) = -3 < f(0) = -1 < f(2) = 1,$$

existe un mínimo absoluto en el intervalo [0,2] en el punto $x = 1$, y un máximo absoluto en el punto $x = 2$. Véase Figura 7.3 a).

b) $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 14)$

Por el ejercicio 7.3 se sabe que esta función es creciente en todo su dominio, luego no tiene extremos locales: ni máximos, ni mínimos.

Se evalúa la función en los extremos del intervalo:

$$f(0) = 14,$$
$$f(2) = 4e^2 \simeq 29,56.$$

Por tanto, el mínimo absoluto en el intervalo se encuentra en el punto $x = 0$, y el máximo absoluto se encuentra en el punto $x = 2$. Véase Figura 7.3 b).

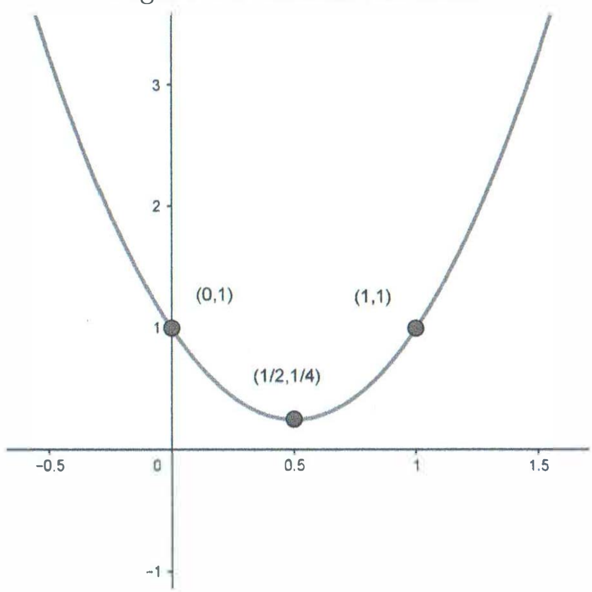
—— ∞ ——

Problema 7.11. Estudia si la siguiente función verifica el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$, en caso afirmativo halla el valor en el que la derivada se anula:

$$f(x) = 3x^2 - 3x + 1.$$

Solución.

Figura 7.4: Teorema de Rolle



$f(x) = 3x^2 - 3x + 1$

En primer lugar, se tiene que la función es continua en $[0, 1]$ y es derivable en $(0, 1)$.

En segundo lugar, se verifica que se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle:

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1.$$

Y como $f(a) = f(0) = 1 = f(1) = f(b)$, se tiene que existe al menos un punto c donde la derivada se anula, $f'(c) = 0$. Véase Figura 7.4.

Ahora se halla la primera derivada y se iguala a cero para obtener el punto buscado:

$$f'(x) = 6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

——— ∞ ———

Problema 7.12. Estudia si la siguiente función verifica el teorema de Rolle en el intervalo $[0, \pi]$ y en caso afirmativo halla el valor en el cual la derivada se anula:

$$f(x) = 3\,\mathrm{sen}(x).$$

Solución.

La función es continua en $[0, \pi]$ y es derivable en $(0, \pi)$, y se verifica que la función es igual en los extremos del intervalo:

$$f(0) = 3 \cdot \mathrm{sen}(0) = 0$$

$$f(\pi) = 3 \cdot \mathrm{sen}(\pi) = 0.$$

Y como $f(a) = f(0) = 0 = f(\pi) = f(b)$, se tiene que existe al menos un punto c donde la derivada se anula, $f'(c) = 0$.

Se halla la primera derivada y se iguala a cero para obtener el punto buscado:

$$f'(x) = 3\cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

——— ∞ ———

Problema 7.13. Halla el punto que cumple el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 1]$ para la función:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 2.$$

Solución.

La función es continua en $[0,1]$ y es derivable en $(0,1)$, entonces existe un valor c del intervalo tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{3-2}{1-0} = 1.$$

Se halla la primera derivada y se iguala al valor obtenido, para obtener el punto buscado:

$$f'(x) = 6x - 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

——— ∞ ———

Problema 7.14. Halla el punto que cumple el teorema del valor medio en el intervalo $[0,1]$ para la función:

$$f(x) = \frac{3x^2-2x+2}{x-2}.$$

Solución.

La función es continua en $[0,1]$ y es derivable en $(0,1)$, entonces existe un valor c del intervalo tal que:

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

$$= \frac{-3-(-1)}{1-0} = -2.$$

Se halla la primera derivada y se iguala al valor obtenido, para obtener el punto buscado:

$$f'(x) = \frac{3x^2-12x+2}{(x-2)^2} = -2 \Rightarrow$$

$$3x^2-12x+2 = -2(x-2)^2 \Rightarrow$$

$$x^2-4x+2=0.$$

Las raices $x = 2-\sqrt{2}$ y $x = 2+\sqrt{2}$ son los candidatos a cumplir el TVM pero solo es válida $x = 2-\sqrt{2}$, ya que la otra no pertenece al intervalo $[0,1]$.

——— ∞ ———

Problema 7.15. Prueba que la siguiente ecuación tiene a lo sumo una raíz real:

$$6x^5 + 12x - 6 = 0.$$

Solución.

Dada $f(x) = 6x^5 + 12x - 6$, supóngase que existen dos valores $a, b \in \mathbb{R}$, siendo $a \neq b$, tales que $f(a) = f(b) = 0$, es decir, que la ecuación posee dos raíces reales.

Entonces como f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por tratarse de una función polinómica, al aplicar el teorema de Rolle se podría afirmar que existe $c \in \mathbb{R}$, con $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$.

Sin embargo:

$$f'(x) = 30x^4 + 12 \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Es decir, no existe ningún valor que anule la primera derivada y, por tanto, no pueden existir dos números reales distintos a y b que anulen la función.

En consecuencia la función tiene como máximo una raíz real.

——— ∞ ———

Problema 7.16. Dada la siguiente ecuación, demuestra que tiene al menos una solución en el intervalo $(0, 2)$. (Nota: Aplica el teorema de Cauchy).

$$e^{2x}\left(-\cos 2 + 1\right) + \left(1 - e^4\right) \operatorname{sen} x = 0$$

Solución.

Se expresa la ecuación propuesta como:

$$\frac{e^{2x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{e^4 - 1}{-\cos 2 + 1}$$

para que tenga una expresión análoga al teorema de Cauchy.

Sean:

$$f(x) = e^{2x},$$
$$g(x) = -\cos x.$$

Por tanto, $f(2) = e^4$, $f(0) = 1$ y $g(2) = -\cos 2$ y $g(0) = -1$.

Ambas funciones son continuas en [0,2] y derivables en (0,2), y sus derivadas son $f'(x) = 2e^{2x}$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Por tanto, por el teorema de Cauchy existirá un valor $c \in [0,2]$, tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)},$$

lo cual equivale a

$$\frac{2e^{2c}}{\operatorname{sen} c} = \frac{e^4 - 1}{-\cos 2 - (-\cos 0)} = \frac{e^4 - 1}{-\cos 2 + 1},$$

y se puede afirmar que existe $c \in [0,2]$, que es la solución de la ecuación buscada.

——— ∞ ———

Problema 7.17. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ b) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7$

Solución.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Por el método para estudiar la concavidad o convexidad de una función se han de seguir los siguientes pasos:

i) Se halla la segunda derivada de la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2).$$

ii) Se iguala la segunda derivada a 0,

$$f''(x) = 6(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

iii) Se establecen los distintos intervalos de estudio, en este caso: $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$.

iv) Se evalúa el signo de la derivada segunda en cada uno de los intervalos obtenidos y se aplica el criterio de concavidad.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Por tanto la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(-\infty, 2)$ y convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(2, \infty)$. Véase Figura 7.5 a).

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7$

i) Se halla la segunda derivada de la función:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4.$$

ii) Se iguala la segunda derivada a 0:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ x_2 = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

iii) Se establecen los distintos intervalos de estudio:

$$\left(-\infty, x_1 = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(x_1 = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, x_2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ y}$$

$$\left(x_2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right)$$

iv) Se evalúa el signo de la derivada segunda en cada uno de los intervalos obtenidos y se aplica el criterio de concavidad.

	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, ∞)
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en

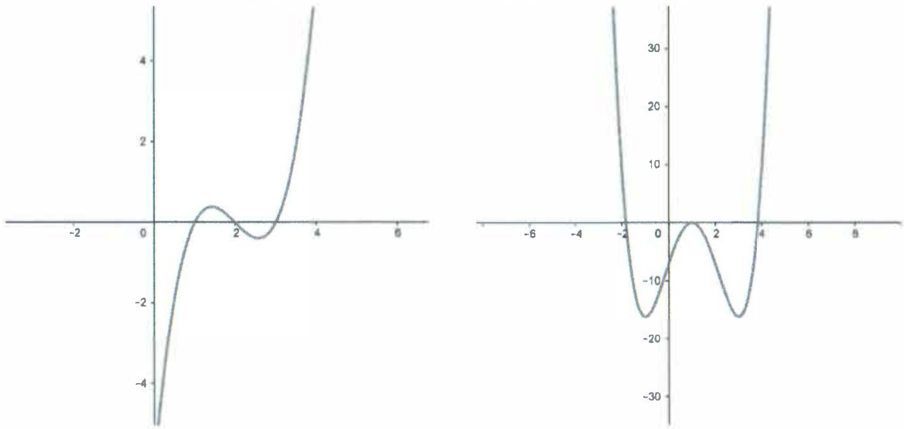
$$\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

y convexa o cóncava hacia arriba (∪) en

$$\left(-\infty, 1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right).$$

Véase Figura 7.5 b).

Figura 7.5: Concavidad y convexidad



a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ b) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7$

——— ∞ ———

Problema 7.18. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ **b)** $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 14)$

c) $f(x) = \dfrac{-(x^2+4)}{2x}$ **d)** $f(x) = x^4(1-x)^3$

Solución.

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1$

Se calcula la segunda derivada y se iguala a cero:

$$f'(x) = 3x^2 - 3,$$

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow 3.$$

Se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(-\infty, 0)$ y convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(0, \infty)$.

b) $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 14)$

Se calcula la segunda derivada y se iguala a cero:

$$f'(x) = e^x(x^2 - 7x + 14) + e^x(2x - 7) = e^x(x^2 - 5x + 7)$$

$$f''(x) = e^x(x^2-5x+7)+e^x(2x-5) = e^x(x^2-3x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
e^x	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(1, 2)$ y convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(-\infty, 1)$ y en $(2, \infty)$.

c) $f(x) = \dfrac{-\left(x^2 + 4\right)}{2x}$

Se calcula la segunda derivada y se comprueba que no se anula en ningún punto:

$$f'(x) = \frac{4 - x^2}{2x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x2x^2 - \left(4 - x^2\right)4x}{4x^4} = \frac{-4}{x^3}$$

Se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos formados teniendo en cuenta el dominio.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(0, \infty)$ y convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(-\infty, 0)$.

d) $f(x) = x^4\,(1-x)^3$

i) Determinar $f''\,(x)$

$$f'(x) = 4x^3(1-x)^3 - 3x^4(1-x)^2$$

$$f''(x) = 3x^2(1-x)^2(4-7x) - 2x^3(1-x)(4-7x) - 7x^3(1-x)^2 =$$

$$f''\,(x) = 6x^2(1-x)(2-8x+7x^2)$$

ii) Igualar $f''\,(x)$ a cero

$$f''\,(x) = 6x^2(1-x)(2-8x+7x^2) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{4}{7} - \dfrac{\sqrt{2}}{7} \\ x_3 = \dfrac{4}{7} + \dfrac{\sqrt{2}}{7} \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

iii) Determinar intervalos

$$(-\infty, 0)\,,\left(0, \frac{4}{7} - \frac{\sqrt{2}}{7}\right), \left(\frac{4}{7} - \frac{\sqrt{2}}{7}, \frac{4}{7} + \frac{\sqrt{2}}{7}\right),$$

$$\left(\frac{4}{7} + \frac{\sqrt{2}}{7}, 1\right) \text{ y } (1, \infty)$$

iv) Estudiar el signo

$$(-\infty, 0)\,,\ \left(0, x_2 = \frac{4}{7} - \frac{\sqrt{2}}{7}\right)$$

$$\left(x_2 = \frac{4}{7} - \frac{\sqrt{2}}{7}, x_3 = \frac{4}{7} + \frac{\sqrt{2}}{7}\right)$$

$$\left(x_3 = \frac{4}{7} + \frac{\sqrt{2}}{7}, 1\right) \text{ y } (1, \infty)$$

	$(-\infty,0)$	$(0,x_2)$	(x_2,x_3)	$(x_3,1)$	$(1,\infty)$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\left(\frac{4}{7}-\frac{\sqrt{2}}{7}\right)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-\left(\frac{4}{7}+\frac{\sqrt{2}}{7}\right)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en los intervalos $\left(\frac{4}{7}-\frac{\sqrt{2}}{7},\frac{4}{7}+\frac{\sqrt{2}}{7}\right)$ y $(1,\infty)$ y es convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en los intervalos $(-\infty,0)$, $\left(0,\frac{4}{7}-\frac{\sqrt{2}}{7}\right)$ y $\left(\frac{4}{7}+\frac{\sqrt{2}}{7},1\right)$.

——— ∞ ———

Problema 7.19. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=4-\dfrac{x}{x^2}$ **b)** $f(x)=x^4-6x^2$

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

Solución.

a) $f(x)=4-\dfrac{x}{x^2}$

Se calcula la segunda derivada y se comprueba que no se anula en ningún punto:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{x^3}$$

Se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos formados teniendo en cuenta el dominio.

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(0, \infty)$ y convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(-\infty, 0)$.

b) $f(x) = x^4 - 6x^2$

Se calcula la segunda derivada y se iguala a cero:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$$

Se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(-1, 1)$ y convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$.

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$

Por el problema 7.9 se conocen la primera derivada, los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

Igualando la segunda derivada a cero:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x = 0$$

y estudiando los signos en los intervalos obtenidos, nótese que $(x^2 - 3x + 3)$ es distinto de 0 para cualquier valor de x y para $x = 0$ su valor es 3, por lo que se puede afrmar que la expresión es siempre positiva.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(0,1)$ y convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(-\infty,0)$ y en $(1,+\infty)$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

Se calcula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} \neq 0.$$

Como $f''(x)$ no se anula en ningún punto, construimos los intervalos teniendo en cuenta que el dominio es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

$$f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x-1)^3(x+1)^3} \neq 0$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(-1,1)$ y convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(-\infty,-1)$ y en $(1,+\infty)$.

——— ∞ ———

Problema 7.20. Estudia la existencia de puntos de inflexión en la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Solución.

Se va a estudiar la existencia de puntos de inflexión por el método del criterio de la segunda derivada para puntos de inflexión:

i) Se halla la primera y segunda derivada de la función,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2).$$

ii) Se iguala la segunda derivada a 0,

$$f''(x) = 6(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

iii) Se establecen los distintos intervalos de estudio, en este caso: $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$.

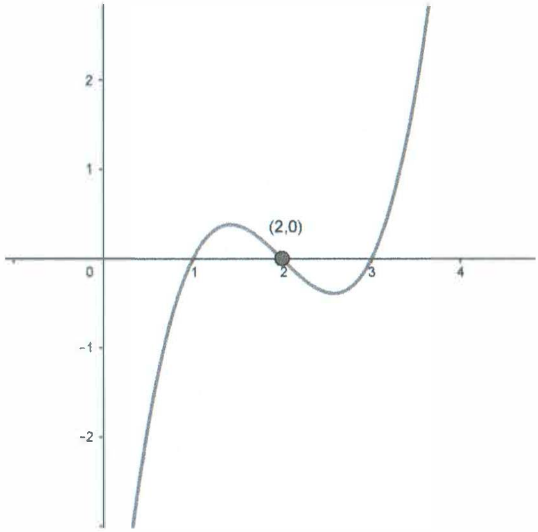
iv) Se evalúa el signo de la derivada segunda en cada uno de los intervalos obtenidos y se aplica el criterio de concavidad.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(-\infty, 2)$ y convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(2, \infty)$.

v) Si hay cambio de sentido de concavidad entre intervalos contiguos, entonces hay cambio de inflexión en ese punto. Por tanto como la función cambia de cóncava a convexa en el punto $x = 2$, se puede asegurar que hay un punto de inflexión en $(2, 0)$. Véase Figura 7.6.

Figura 7.6: Función con punto de inflexión I



——— ∞ ———

Problema 7.21. Estudia la existencia de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7$ **b)** $f(x) = x^4(1-x)^3$

Solución.

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7$

Se sabe por el problema 7.17 b) que:

	$\left(-\infty, 1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, 1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en el intervalo $(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{3}})$ y convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en los intervalos $(-\infty, 1 + \frac{2}{\sqrt{3}})$ y $(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \infty)$.

Como hay cambio de sentido de concavidad en el punto $x = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, hay punto de inflexión en ese punto. Y como también hay cambio de concavidad en el punto $x = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, hay otro punto de inflexión en ese punto.

b) $f(x) = x^4(1-x)^3$

Se sabe por el apartado c) del problema 7.17 que:

	$(-\infty, 0)$	$(0, x_2)$	(x_2, x_3)	$(x_3, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Por tanto, la función es cóncava o cóncava hacia abajo ($\cap$) en los intervalos $\left(\dfrac{4}{7} - \dfrac{\sqrt{2}}{7}, \dfrac{4}{7} + \dfrac{\sqrt{2}}{7}\right)$ y $(1, \infty)$ y es convexa o cóncava hacia arriba ($\cup$) en los intervalos $(-\infty, 0)$, $\left(0, \dfrac{4}{7} - \dfrac{\sqrt{2}}{7}\right)$ y $\left(\dfrac{4}{7} + \dfrac{\sqrt{2}}{7}, 1\right)$.

Como hay cambio de sentido de concavidad en el punto $x = \dfrac{4}{7} - \dfrac{\sqrt{2}}{7}$, hay punto de inflexión en ese punto. Como también hay cambio de concavidad en el punto $x = \frac{4}{7} + \frac{\sqrt{2}}{7}$, hay otro punto de inflexión en ese punto. Y como hay otro cambio de concavidad en el punto $x = 1$, hay otro punto de inflexión en ese punto.

También se podría haber utilizado el criterio de las $r - 1$ derivadas. Así, una vez halladas la primera y segunda derivada, e igualando esta última a 0, se obtienen los posibles candidatos a puntos de inflexión:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{7} - \frac{\sqrt{2}}{7} \\ x = \frac{4}{7} + \frac{\sqrt{2}}{7} \\ x = 1 \end{cases}$$

Se halla la siguiente derivada, la tercera, y se evalúan los puntos:

$$f'''(x) = -6x(35x^3 - 60x^2 + 30x - 4)$$

$$f'''(0) = 0 \Rightarrow \text{No se sabe}$$

$$f'''(1) = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Pto. inflexión}$$

$$f'''\left(\frac{4}{7} - \frac{\sqrt{2}}{7}\right) = -1,49 \neq 0 \Rightarrow \text{Pto. inflexión}$$

$$f'''\left(\frac{4}{7} + \frac{\sqrt{2}}{7}\right) = 2,29 \neq 0 \Rightarrow \text{Pto. inflexión.}$$

Para $x = 0$, se vuelve a derivar y a sustituir:

$$f^{iv)}(x) = -24(35x^3 - 45x^2 + 15x - 1)$$

$$y^{iv)}(0) = 24 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$

——— ∞ ———

Problema 7.22. Dadas las siguientes funciones halla los puntos de inflexión.

a) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 4$ **b)** $f(x) = x^3 - 3x - 1$

c) $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 14)$ **d)** $f(x) = \frac{-(x^2 + 4)}{2x}$

Solución.

a) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 4$

Se va a aplicar el método del criterio de las $r-1$ derivadas para puntos de inflexión:

i) Se hallan la primera y segunda derivadas de la función:

$$f'(x) = 6x^2 - 24x,$$

$$f''(x) = 12x - 24.$$

ii) Se iguala la segunda derivada a 0:

$$f''(x) = 12x - 24 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

iii) Se halla la tercera derivada:

$$f'''(x) = 12 \neq 0.$$

iv) Se evalúa la tercera derivada para los puntos obtenidos en el paso ii). Si el valor obtenido es distinto de 0, entonces es un punto de inflexión. Luego existe un punto de inflexión en $x = 2$.

b) $f(x) = x^3 - 3x - 1$

Se va a aplicar el método del criterio de las $r-1$ derivadas para puntos de inflexión:

i) Se hallan la primera y segunda derivadas de la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 3,$$

$$f''(x) = 6x.$$

ii) Se iguala la segunda derivada a 0:

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

iii) Se halla la tercera derivada:

$$f'''(x) = 6 \neq 0.$$

iv) La tercera derivada es distinta de 0 para cualquier punto, luego existe un punto de inflexión en $x = 0$.

c) $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 14)$

i) Se hallan la primera y segunda derivadas de la función:

$$f'(x) = e^x(x^2 - 5x + 7),$$

$$f''(x) = e^x(x^2 - 3x + 2).$$

ii) Se iguala a 0:

$$f''(x) = e^x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Los posibles puntos de inflexión son $x = 1$ y $x = 2$.

iii) Se halla la tercera derivada:

$$f'''(x) = e^x(x^2 - 3x + 2) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 1).$$

iv) Se evalúan los posibles puntos de inflexión:

$$f'''(1) = e^1(1^2 - 1 \cdot 1 - 1) = -e \neq 0 \Rightarrow \text{Pto. inflexión}$$

$$f'''(2) = e^2(2^2 - 1 \cdot 2 - 1) = e^2 \neq 0 \Rightarrow \text{Pto. inflexión}$$

d) $f(x) = \dfrac{-(x^2 + 4)}{2x}$

i) Se hallan la primera y segunda derivadas de la función:

$$f'(x) = \frac{4 - x^2}{2x^2},$$

$$f''(x) = \frac{-4}{x^3} \neq 0$$

ii) Como no hay puntos que anulen la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-4}{x^3} \neq 0$$

iii) Entonces se puede asegurar que no hay puntos de inflexión.

——— ∞ ———

Problema 7.23. Halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4 - \dfrac{x}{x^2}$ **b)** $f(x) = x^4 - 6x^2$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

Solución.

a) $f(x) = 4 - \dfrac{x}{x^2}$

i) y ii) Se calcula la primera y segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0.$$

iii) Como no hay puntos que anulen la segunda derivada, entonces se puede asegurar que no hay puntos de inflexión.

b) $f(x) = x^4 - 6x^2$

i) Se calcula la primera y segunda derivada:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x,$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2-1).$$

ii) Se iguala f'' a cero:

$$f''(x) = 12(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$$

Luego $x = 1$ y $x = -1$ son los posibles puntos de inflexión.

iii) Se calcula f''':

$$f'''(x) = 24x.$$

iv) Se evalúan los puntos obtenidos en ii):

$$f'''(-1) = 24 \cdot (-1) = -24 \neq 0 \Rightarrow \text{Pto. inflexión.}$$

$$f'''(1) = 24 \cdot 1 = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{Pto. inflexión.}$$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$

i) Se calcula la primera y segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}.$$

ii) Se igual a cero la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

iii) Se calcula la tercera derivada:

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}.$$

iv) Se sustituyen los puntos obtenidos en ii):

$$f'''(0) = \frac{-6}{(0-1)^4} = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Pto. inflexión.}$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

i) Se calcula la primera y segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}.$$

ii) Como no hay puntos que anulen la segunda derivada, entonces se puede asegurar que no hay puntos de inflexión.

$$f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} \neq 0.$$

——— ∞ ———

Problema 7.24. Halla la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión de la función:

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 4$$

Solución.

i) Se calculan las derivadas primera y segunda:

$$f'(x) = 6x^2 - 24x,$$

$$f''(x) = 12x - 24.$$

ii) Se iguala a cero la derivada segunda:

$$f''(x) = 12x - 24 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

iii) Se calcula la derivada tercera:

$$f'''(x) = 12.$$

iv) Al ser la tercera derivada distinta de cero, implica que $x = 2$ es punto de inflexión.

La ecuación de la recta tangente que pasa por un punto es:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Como $x_0 = 2$, se calcula y_0:

$$y_0 = f(2) = 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 4 = -28.$$

Y el valor de la pendiente es $m = f'(x_0)$, es decir:

$$m = f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 = -24.$$

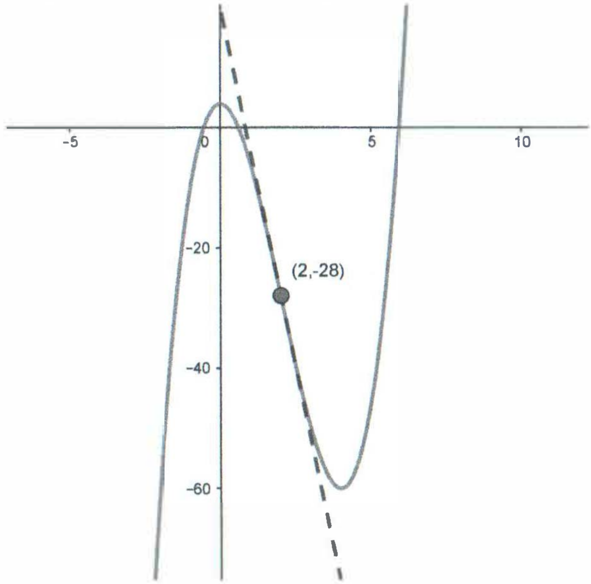
Así, la recta tangente que pasa por el punto de inflexión es:

$$y + 28 = -24(x - 2) = -24x + 48$$

$$y = -24x + 20.$$

Véase Figura 7.7.

Figura 7.7: Función con punto de inflexión II



—— ∞ ——

Problema 7.25. Halla la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión de la función:

$$f(x) = x^5 - 80x^2 + 3x$$

Solución.

En primer lugar, se halla el punto de inflexión de la función:

$$f'(x) = 5x^4 - 160x + 3$$

$$f''(x) = 20x^3 - 160.$$

Igualando la segunda derivada a 0, se obtienen los posibles puntos de inflexión:

$$f''(x) = 20x^3 - 160 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Se halla a continuación la tercera derivada:

$$f'''(x) = 60x^2$$

y se evalúa en el punto:

$$f'''(2) = 240 \neq 0$$

que como es distinta de cero, implica que el punto hallado es punto de inflexión.

La ecuación de la recta tangente que pasa por un punto dado (x_0, y_0) es:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Se ha hallado que $x_0 = 2$, se calcula y_0:

$$y_0 = f(2) = 2^5 - 80 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = -282.$$

Y el valor de la pendiente m es el valor de la primera derivada evaluada en x_0:

$$m = f'(2) = 5 \cdot 2^4 - 160 \cdot 2 + 3 = -237.$$

Luego se tiene que la recta tangente que pasa por el punto de inflexión es:

$$y + 282 = -237(x - 2) = -237x + 474,$$

$$y = -237x + 192.$$

——— ∞ ———

Problema 7.26. Halla el rectángulo de área máxima, cuyo perímetro es igual a 20.

Solución.

i) En primer lugar, se escribe la ecuación principal a optimizar, en este caso sería la fórmula del área de un rectángulo.

$$A = xy.$$

ii) La ecuación secundaria viene determinada por los datos conocidos del perímetro:

$$P = 2x + 2y = 20.$$

iii) Hay que transformar la ecuación primaria en una ecuación de una única variable independiente a partir de las ecuaciones secundarias, para ello en la ecuación secundaria se despeja la y:

$$y = \frac{20 - 2x}{2} = 10 - x.$$

Y se sustituye en la ecuación primaria:

$$A(x) = xy = x(10 - x) = 10x - x^2.$$

iv) A continuación, se establece el dominio en que tiene sentido el problema, por ser el área una magnitud positiva o mayor que 0 se establece que $x \geq 0$.

v) Seguidamente se hallan los puntos críticos de la función para con ellos obtener los posibles extremos.

$$A'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5.$$

vi) Se evalúa la función en los puntos críticos del dominio:

$$A''(x) = -2$$

$$A''(5) = -2 > 0 \Rightarrow Máximo.$$

vii) Luego el valor hallado para x es 5 y a partir de ahí se obtiene el valor de y:

$$y = 10 - x = 5.$$

Por tanto, se está ante un cuadrado de lado 5, y el área máxima es:

$$A = xy = 5 \cdot 5 = 25.$$

——— ∞ ———

Problema 7.27. Ana y Beatriz quieren fabricarse su propio cuaderno de apuntes de matemáticas con forma rectangular, y quieren minimizar el gasto en papel. Sabiendo que los márgenes laterales son de 1 cm cada uno y el superior e inferior de 1,5 cm cada uno y que el espacio para tomar apuntes ha de ocupar $96\,cm^2$, halla las dimensiones del cuaderno.

Solución.

i) En primer lugar, se escribe la ecuación principal a optimizar, en este caso sería la fórmula del área de un rectángulo. La base es el ancho del espacio para tomar apuntes más los márgenes laterales, luego $b = x + 1 + 1 = x + 2$. La altura es el largo del espacio para tomar apuntes más los márgenes superior e inferior, $h = y + 1,5 + 1,5 = y + 3$:

$$A = (x + 2)(y + 3) = xy + 3x + 2y + 6.$$

ii) La ecuación secundaria viene determinada por el espacio para escribir los apuntes, que es:

$$xy = 96.$$

iii) Hay que transformar la ecuación primaria en una ecuación de una única variable independiente a partir de las ecuaciones secundarias, para ello en la ecuación secundaria se despeja la y:

$$y = \frac{96}{x}$$

y se sustituye en la ecuación primaria

$$A(x) = xy + 3x + 2y + 6 = x\frac{96}{x} + 3x + 2\frac{96}{x} + 6 = 3x + \frac{192}{x} + 102.$$

iv) A continuación, se establece el dominio en que tiene sentido el problema, por ser el área una magnitud positiva o mayor que 0 se establece que $x \geq 0$.

v) Seguidamente se hallan los puntos críticos de la función para con ellos obtener los posibles extremos.

$$A'(x) = 3 - \frac{192}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{192}{3} = 64 \Rightarrow x = \pm 8.$$

Se desecha el valor -8 por no estar dentro del dominio buscado.

vi) Se evalúa la función en los puntos críticos del dominio y en los extremos, y el mayor es el que indicará el valor buscado:

$$A''(x) = \frac{384}{x^3},$$

$$A''(8) = \frac{384}{8^3} = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo}$$

vii) Luego el valor hallado para x es 8 y a partir de ahí se obtiene el valor de y:

$$y = \frac{96}{x} = \frac{96}{8} = 12.$$

Por tanto, las dimensiones del cuaderno son $b = x + 2 = 10$ y $h = y + 3 = 15$ y el área del cuaderno es:

$$A = (x + 2)(y + 3) = (8 + 2)(12 + 3) = 150.$$

—— ∞ ——

Problema 7.28. Calcula mediante la regla de L'Hôpital los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2-9x^3+11x^4-4x^5}{(1-x)^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2-9x^3+11x^4-4x^5}{(1-x)^3}$

Aplicando la definición de límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2-9x^3+11x^4-4x^5}{(1-x)^3} = \frac{0}{0}.$$

Se aplica por tanto la regla de L'Hôpital, varias veces y se tiene:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2-9x^3+11x^4-4x^5}{(1-x)^3}$$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1+2x-27x^2+44x^3-20x^4}{-3(1-x)^2}$$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2-54x+132x^2-80x^3}{6(1-x)}$$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-54x+264x-240x^2}{-6} = 5.$$

Nota: Este límite se puede resolver simplificando.

El límite se puede reescribir como

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2-9x^3+11x^4-4x^5}{(1-x)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{-x(1-x)^3\,(4x+1)}{(1-x)^3}$$

$$= \lim_{x\to 1} x\,(4x+1) = 5.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

Aplicando la definición de límites:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\infty-\infty.$$

Operando y aplicando la regla de L'Hôpital varias veces se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{(e^x-1)+xe^x}$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{1+1+0}=\frac{1}{2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

Aplicando la definición de límites:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=0\cdot\infty.$$

Reescribiendo y aplicando la regla de L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0}-x=0.$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

Aplicando la definición de límites:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\infty^0.$$

Como es una función potencial exponencial se toman logaritmos:

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x},$$

$$\ln L=\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}\right]=\lim_{x\to 0}\ln\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \tan x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \tan x\,(\ln 1 - \ln x) = \lim_{x\to 0} -\tan x \ln x = 0{\cdot}\infty.$$

Reescribiendo:

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\ln x}{1/\tan x}\right)$$

Aplicando L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\ln x}{1/\tan x} = \lim_{x\to 0} -\frac{(1/x)}{(-1/\operatorname{sen}^2 x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\operatorname{sen} x = 1\cdot 0 = 0.$$

Por tanto:

$$\ln L = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = 1.$$

e) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

Aplicando la definición de límites:

$$\lim_{x\to 0} x^x = 0^0.$$

Como es una función potencial exponencial se toman logaritmos:

$$L = \lim_{x\to 0} x^x,$$

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0} x^x\right] = \lim_{x\to 0}\ln\left(x^x\right).$$

Reescribiendo y aplicando la regla de L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

Por tanto:

$$\ln L = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1.$$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

Aplicando la definición de límites:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital dos veces se tiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

——— ∞ ———

Problema 7.29. Analiza y representa la función:

$$f(x) = -\frac{3x}{x-4}$$

Solución.

i) Determinar el dominio y rango de la función. Como se trata de una función racional, el dominio es todo $\mathbb{R}$ excepto los puntos en que se anule el denominador. El denominador se anula en el punto $x = 4$.

El dominio de la función es:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{4\}.$$

ii) Estudio de la continuidad de la función y de los posibles puntos de discontinuidad. La función es continua en todo su dominio por ser cociente de funciones continuas. En $x = 4$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito, pues los límites laterales existen y son distintos:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} -\frac{3x}{x-4} = +\infty.$$
$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} -\frac{3x}{x-4} = -\infty.$$

iii) Determinar los puntos de corte de la función con los ejes.

1. Corte con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{3x}{x-4} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$Punto (0,0).

2. Corte con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -\dfrac{3 \cdot 0}{0-4} = 0 \Rightarrow y = 0$ ⇒Punto (0,0).

iv) Estudio de simetrías y periodicidad de la función.

a) ¿Es par?

$$f(-x) = -\frac{3(-x)}{(-x)-4} = \frac{3x}{(-x)-4} \neq f(x).$$

Luego no hay simetría respecto del eje OX.

b) ¿Es impar?

$$-f(x) = -(-\frac{3x}{x-4}) = \frac{3x}{x-4} \neq \frac{3x}{(-x)-4} = f(-x).$$

Luego no hay simetría respecto del eje OY.

Como la función no es trigonométrica no se estudia la periodicidad.

v) Estudio de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

a) Asíntotas verticales:

Como el denominador de la función se anula en el punto $x = 4$, se puede afirmar que existe asíntota vertical en $x = 4$. Y se puede comprobar mediante el límite cuando $x \to 4$:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} -\frac{3x}{x-4} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} -\frac{3x}{x-4} = -\infty.$$

b) Asíntotas horizontales:

$y = L$ es asíntota horizontal de f si el límite de la función es L cuando $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} -\frac{3x}{x-4} = -3.$$

Luego en este caso existe una asíntota horizontal en $y = -3$.

c) Asíntotas oblicuas:

Dado que existen asíntotas horizontales en todo el dominio no existen asíntotas oblicuas.

vi) Estudio de la derivabilidad de la función y obtención de puntos críticos.

Se calcula la primera derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{12}{(x-4)^2} > 0.$$

Y, como se puede observar, la derivada es siempre positiva.

vii) Análisis del crecimiento y decrecimiento de la función.

Como la derivada es siempre positiva la función es creciente en todo su dominio, luego es creciente en los intervalos

$$(-\infty, 4) \cup (4, \infty).$$

viii) Hallar los extremos locales.

Como la derivada no se iguala a 0 en ningún punto se puede asegurar que no hay extremos locales.

ix) Análisis de la concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

Se halla la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-24}{(x-4)^3}.$$

Se establecen los posibles intervalos de concavidad y convexidad a partir de los puntos críticos y los puntos de discontinuidad, evaluando en los mismos la segunda derivada.

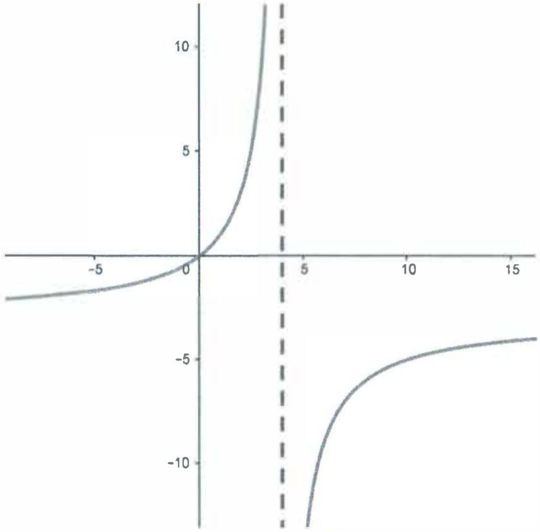
	$(-\infty, 4)$	$(4, +\infty)$
f''	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

Por tanto, se tiene que la función es convexa, $\cup$, en el intervalo $(-\infty, 4)$ y es cóncava, $\cap$, en el intervalo$(4, \infty)$.

Aunque la gráfica pasa de convexa a cóncava en $x = 4$, como la función no es continua en el punto se puede asegurar que no existe punto de inflexión. Esto ya se sabía puesto que no existían puntos críticos.

x) Dibujar la gráfica. Véase la Figura 7.8.

Figura 7.8: Representación gráfica de una función



$$f(x) = \frac{-3x}{x-4}$$

———— ∞ ————

Problema 7.30. Halla la aproximación lineal de la función $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x}$ en el entorno de $x = 1$ y comprueba el error cometido.

Solución.

Se halla la derivada de la función:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Se evalúa la función y la derivada en el punto:

$$f(1) = 2,\ f'(1) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

La aproximación lineal de la función f en el entorno de $x = a$ viene dada por

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a)$$

y en este caso, para $x = 1$ es

$$f(x) \simeq 2 + \frac{7}{3}(x-1) = \frac{7}{3}x - \frac{1}{3}.$$

A partir de la aproximación lineal se puede comprobar el error cometido por la aproximación, así por ejemplo para $x = 1,01$, el valor de la función es $f(1,01) = 2,02342$ y el valor de la aproximación es $2,02333$.

——— ∞ ———

Problema 7.31. Halla la aproximación lineal de la función $f(x) = xe^x - 1$ en el entorno de $x = 2$ y comprueba el error cometido.

Solución.

Se halla la derivada de la función

$$f'(x) = e^x + xe^x.$$

Se evalúa la función y la derivada en el punto:

$$f(2) = 2e^2 - 1,\ f'(2) = e^2 + 2e^2 = 3e^2.$$

Y, por tanto, la aproximación lineal de la función f en el entorno de $x = 2$ es:

$$f(x) \simeq f(2) + f'(2)(x-2)$$

$$f(x) \simeq 2e^2 - 1 + 3e^2(x-2) = 3e^2x - 4e^2 - 1.$$

A partir de la aproximación lineal se puede comprobar el error cometido por la aproximación.

Así, por ejemplo, para $x = 2,01$, el valor de la función es $f(2,01) = 14,00126$ y el valor de la aproximación es $13,99978$.

——— ∞ ———

Problema 7.32. Dada la función $f(x) = e^{2x}$, calcula la función derivada de $f(x)$, y la derivada y la diferencial en el punto para $x = 0$.

Solución.

La función derivada es

$$f'(x) = 2e^{2x}.$$

La derivada de $f(x)$ en el punto $x = 0$ es

$$f'(0) = 2e^{2\cdot 0} = 2.$$

La diferencial de $f(x)$ en el punto $x = 0$ es

$$Df(2) = f'(2)\, h = 2 \cdot h = 2h.$$

——— ∞ ———

Problema 7.33. Halla el polinomio de Taylor de tercer grado de la función $f(x) = xe^x$ en el punto $x = 1$.

Solución.

Se hallan las derivadas y el valor de las mismas en el punto $x = 1$

$$\begin{array}{ll} f(x) = xe^x & f(1) = 1\cdot e^1 = e \\ f'(x) = e^x\,(x+1) & f'(1) = 2e \\ f''(x) = e^x\,(x+2) & f''(1) = 3e \\ f'''(x) = e^x\,(x+3) & f'''(1) = 4e. \end{array}$$

El Polinomio de Taylor de tercer grado en $x = 1$ para $f\,(x)$ es:

$$P(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Y sustituyendo se tiene:

$$f(x) = e + \frac{2e}{1!}(x-1) + \frac{3e}{2!}(x-1)^2 + \frac{4e}{3!}(x-1)^3$$

$$f(x) = e + 2e(x-1) + \frac{3}{2}e(x-1)^2 + \frac{2}{3}e(x-1)^3$$

——— ∞ ———

Problema 7.34. Halla el polinomio en potencias de x de grado tres correspondiente a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto $x = 0$.

Solución.

En primer lugar, se hallan las derivadas y el valor de las mismas en el punto $x = 0$

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = \cos 0 = 1 \\
f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -\cos 0 = -1.
\end{array}
$$

Y como el polinomio de grado 3 en potencias de x es

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3,$$

sustituyendo se tiene:

$$P_3(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}.$$

——— ∞ ———

Problema 7.35. Obtén los cuatro primeros términos del desarrollo de Taylor en $x = 1$ para la función $f(x) = e^x$ usando el resto de Lagrange.

Solución.

Se hallan las derivadas y el valor de las mismas en el punto $x = 1$

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = e^x & f(1) = e^1 = e \\
f'(x) = e^x & f'(1) = e \\
f''(x) = e^x & f''(1) = e \\
f'''(x) = e^x & f'''(1) = e \\
f^{iv)}(x) = e^x & f^{iv)}(1) = e \\
f^{v)}(x) = e^x & f^{v)}(\theta) = e^\theta
\end{array}
$$

El desarrollo de Taylor en $x = 1$ es:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$+\frac{f^{iv)}(1)}{4!}(x-1)^4+\frac{f^{v)}(\theta)}{5!}(x-1)^5.$$

Y sustituyendo se tiene:

$$f(x)=e+\frac{e}{1!}(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+\frac{e}{3!}(x-1)^3$$

$$+\frac{e}{4!}(x-1)^4+\frac{e^{\theta}}{5!}(x-1)^5.$$

——— ∞ ———

Problema 7.36. Halla la fórmula de McLaurin de la función $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ usando el resto de Lagrnage.

Solución.

Se hallan las derivadas y el valor de las mismas en el punto $x=0$

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3} \qquad f''(0)=2$$

$$f'''(x)=\frac{6}{(1-x)^4} \qquad f'''(0)=6$$

$$f^{iv)}(x)=\frac{24}{(1-x)^5} \qquad f^{iv)}(0)=24$$

Como el desarrollo de MacLaurin es:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{n)}}{n!}x^n+T_n,$$

$$f(x)=1+\frac{1}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{6}{3!}x^3+\cdots+\frac{n!}{n!}x^n+T_n,$$

donde T_n es:

$$T_n=\frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{(n+1)},\ 0<\theta<1,$$

$$T_n = \frac{(n+1)!}{(1-\theta)^{n+1}(n+1)!} x^{(n+1)}, \; 0 < \theta < 1.$$

Sustituyendo se tiene:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \frac{1}{(1-\theta)^{n+1}} x^{(n+1)}.$$

—— ∞ ——

Problema 7.37. Halla la fórmula de McLaurin de la función $f(x) = \cos x$.

Solución.

En primer lugar, se hallan las derivadas y el valor de las mismas en el punto $x = 0$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = \cos 0 = 1 \\ f'(x) = -\operatorname{sen} x & f'(x) = -\operatorname{sen} 0 = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(x) = -\cos 0 = -1 \\ f'''(x) = \operatorname{sen} x & f'''(x) = \operatorname{sen} 0 = 0. \end{array}$$

El desarrollo en serie de potencias es

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \cdots$$

Sustituyendo se tiene:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + O(x^6).$$

—— ∞ ——

Problema 7.38. Halla la fórmula de MacLaurin para $f(x) = e^x$.

Solución.

Observando la tabla del ejercicio anterior, se puede ver que:

$$f^{n)}(x) = e^x \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como el desarrollo de MacLaurin es:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n + T_n$$

donde T_n es:

$$T_n = \frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{(n+1)},\ 0 < \theta < 1.$$

Sustituyendo se tiene:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

——— ∞ ———

Problema 7.39. Las nevadas de principios de marzo han hecho que el nivel de nieve (altura en cm) siguiera la siguiente función

$$N(t) = -2t^2 + 48t + 360$$

donde t son los días transcurridos desde que comenzó a nevar.

a) ¿En qué momento la altura de nieve es mayor y qué altura alcanza?

b) ¿A partir de qué momento la altura empieza a decrecer? ¿En qué momento la nieve desaparece?

Solución.

a) Calcular el momento en que la altura de la nieve es mayor es hallar el máximo de la función. Para ello se calcula la primera derivada

$$N'(t) = -4t + 48.$$

Igualando la primera derivada a 0, se obtienen los puntos críticos

$$N'(t) = -4t + 48 = 0 \Rightarrow t = 12.$$

Se halla a continuación la segunda derivada

$$N''(t) = -4$$

que, al ser menor que 0, asegura la existencia de un máximo en el punto $t = 12$ y la altura alcanzada es $N(12) = 648cm$.

b) Según el apartado anterior el máximo se alcanza en el punto (12, 648) y se puede afirmar que a partir del día 12 la altura empieza a decrecer.

Se puede resolver de forma analítica, derivando e igualando la derivada a 0, los intervalos son $(0, 12)$, y $(12, \infty)$. Se evalúa la primera derivada

	$(0, 12)$	$(12, \infty)$
$N'(t)$	$+$	$-$

Y los intervalos de crecimiento y decrecimiento para $N(t)$ son

Intervalos de crecimiento: $(0, 12)$.

Intervalos de decrecimiento: $(12, \infty)$, que se restringe a $(12, 30)$ ya que a partir de $t = 30$ se tendrían alturas negativas, lo que no es posible.

Finalmente, calcular el momento en que la nieve desaparece es calcular cuándo la función toma el valor 0

$$N(t) = -2t^2 + 48t + 360 = 0 \Rightarrow t = 30 \text{ ó } t = -6.$$

Y, desestimando el valor negativo, la nieve desaparece en $t = 30$.

——— ∞ ———

Problema 7.40. La gráfica de velocidad de un autobús en los 6 minutos previos a un accidente quedó recogida en el tacómetro, y se ajusta bastante bien a la siguiente función:

$$V(t) = 24t - 15t^2 + 2t^3 + 100,\ 0 \leq t \leq 6$$

a) Especifica los intervalos de tiempo en que la velocidad aumentó y aquellos en qué disminuyó.

b) ¿En qué momentos se alcanza la mayor y menor velocidad?

c) ¿Hay puntos de inflexión?

d) Dibuja la gráfica de la función.

Solución.

a) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad, se halla la derivada de la función

$$V'(t) = 24 - 30t + 6t^2.$$

A continuación, se iguala la derivada a 0, para obtener los distintos intervalos a estudiar

$$V'(t) = 24 - 30t + 6t^2 = 0$$

$$V'(t) = 6(t^2 - 5t + 4) = 6(t-1)(t-4) = 0$$

$$t = 1 \text{ ó } t = 4.$$

Por tanto, los intervalos a estudiar son $(0,1), (1,4)$ y $(4,6)$. Se evalúa la primera derivada en los citados intervalos y se tiene:

	$(0,1)$	$(1,4)$	$(4,6)$
$V'(t)$	$+$	$-$	$+$

Y, por tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento para $f(x)$ son:

Intervalos de crecimiento: $(0,1) \cup (4,6)$.

Intervalos de decrecimiento: $(1,4)$.

Luego se tiene que la velocidad estaba creciendo en el momento del accidente.

b) Para calcular los máximos y mínimos, se calcula la primera derivada y se iguala a 0 para hallar los puntos críticos, y que como se ha visto en el apartado anterior son $t = 1$ y $t = 4$.

Se calcula la segunda derivada de la función

$$V''(t) = -30 + 12t.$$

Y se evalúan los puntos críticos hallados en ella

$$V''(1) = -30 + 12 \cdot 1 = -18 < 0,$$

$$V''(4) = -30 + 12 \cdot 4 = 18 > 0.$$

Por tanto, existe un máximo relativo en $(1, 111)$ y un mínimo relativo en $(4, 84)$.

Asimismo, se evalúa la función en los bordes del intervalo y se tiene:

$$V(0) = 24 \cdot 0 - 15 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0^3 + 100 = 100$$

$$V(6) = 24 \cdot 6 - 15 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^3 + 100 = 136.$$

Luego se tiene que el punto en que la velocidad es menor es $t = 4$ y la velocidad en ese momento es 84.

El punto donde la velocidad es mayor es $t = 6$ y la velocidad alcanzada en ese momento es 136, que coincide con el momento del accidente.

c) Para calcular los puntos de inflexión se iguala la segunda derivada a 0

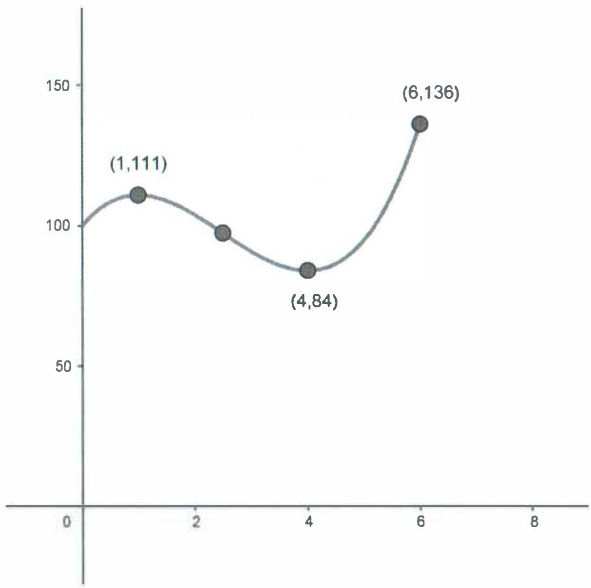
$$V''(t) = -30 + 12t = 0 \Rightarrow t = 2,5.$$

Se calcula la tercera derivada

$$V'''(t) = 12,$$

y como es distinto de 0, se puede afirmar que hay un punto de inflexión en $(2,5\ ;\ 97,5)$.

d) La representación gráfica de la función es la siguiente:



——— ∞ ———

Problema 7.41. De una función f se conoce que la gráfica de su derivada es la parábola con vértice (1, 1). Además se sabe que pasa por los puntos (0, 0) y (2, 0). Sin realizar cálculos, halla razonadamente:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Los intervalos de concavidad y convexidad de f.

c) Extremos relativos y los puntos de inflexión de f.

Solución.

a) Como la gráfica de la derivada es una parábola con vértice (1,1), y que pasa por los puntos (0,0) y (2,0), se tiene que $f'(x) > 0$ en el intervalo $(0, 2)$, luego f es creciente en ese intervalo. Asimismo, se deduce que $f'(x) < 0$ en los intervalos $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, luego f es decreciente en esos intervalos.

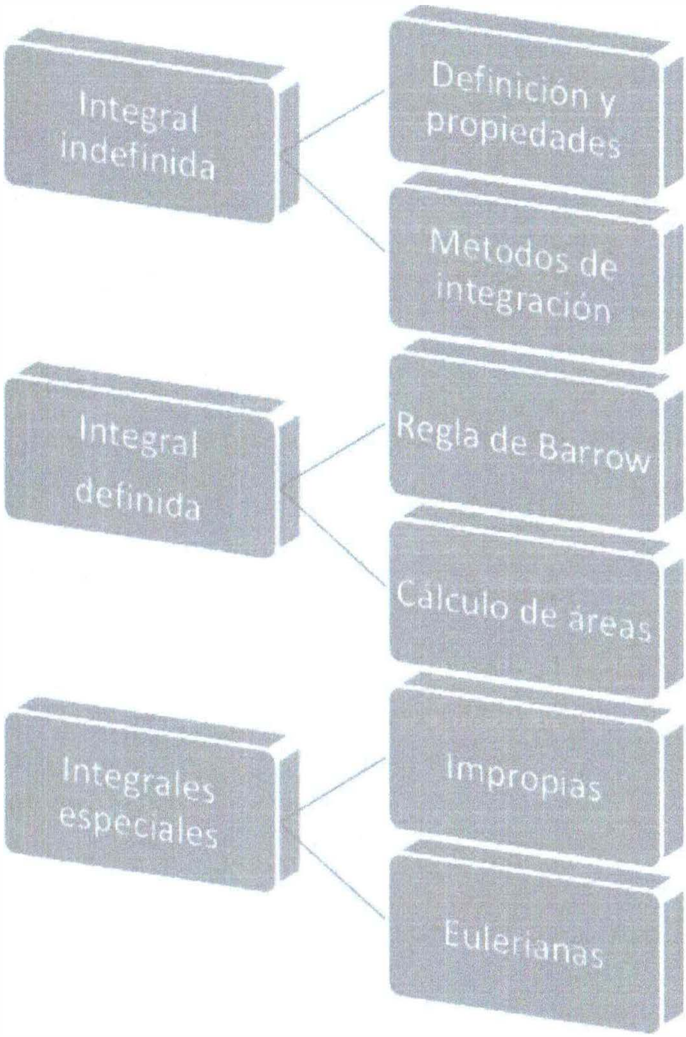
b) Como $f'(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$, entonces $f''(x) > 0$ en dicho intervalo, y $f(x)$ es convexa, $\cup$, en el intervalo $(-\infty, 1)$. Como $f'(x)$ es decreciente en $(1, \infty)$, entonces $f''(x) < 0$ en dicho intervalo, y $f(x)$ es cóncava, $\cap$, en el intervalo $(1, \infty)$.

c) Se sabe que $f'(x) = 0$ para $x = 0$ y $x = 2$. Luego estos son los puntos críticos. Como la función decrece hasta el 0 y luego crece, hay un mínimo en $x = 0$. Como la función crece hasta el 2 y luego decrece, hay un máximo en $x = 2$. Finalmente, se sabe que la función cambia de convexa a cóncava en 1, por tanto existe un punto de inflexión en $x = 1$.

—— ∞ ——

Capítulo 8

LA INTEGRAL



Problema 8.1. Halla una función que al ser derivada el resultado sea la función $f(x) = 4x^3$.

Solución.

Con el conocimiento adquirido en el proceso de derivación es fácil darse cuenta que la función buscada $F(x)$ podría ser algo del tipo:

$$F(x) = x^4$$

pues efectivamente al hacer la derivada de la función F se tiene que

$$F'(x) = 4x^3 = f(x).$$

——— ∞ ———

Problema 8.2. Verifica que $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2x + 3$ es una primitiva de la función $f(x) = x^4 + 2$.

Solución.

Efectivamente, si se procede a derivar la función F se obtiene la función f:

$$F'(x) = x^4 + 2 = f(x).$$

——— ∞ ———

Problema 8.3. Verifica que $F(x) = \ln(5 - x)$ es una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{-1}{5-x}$. Nota: Considera solo los puntos del dominio de F.

Solución.

Efectivamente, si se procede a derivar la función F se obtiene la función f:

$$F'(x) = \frac{1}{5-x}(-1) = \frac{-1}{5-x} = f(x).$$

——— ∞ ———

Problema 8.4. Sean las funciones $F(x) = x^5+2x^3+5$ y $G(x) = x^5+2x^3+3$. Comprueba si son primitivas de la misma función.

Solución.

Se halla la derivada de F y se tiene:

$$F'(x) = 5x^4 + 6x^2.$$

Se halla la derivada de G y se tiene:

$$G'(x) = 5x^4 + 6x^2.$$

Y como $F'(x) = G'(x) = f(x)$ se tiene que ambas funciones F y G pertenecen a la familia de las primitivas de la función f.

———— ∞ ————

Problema 8.5. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 6dx$ **b)** $\int 8xdx$ **c)** $\int \frac{2}{x^2}dx$ **d)** $\int \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}dx$ **e)** $\int \frac{3x^4}{2\sqrt[7]{x^6}}dx$

Solución.

a) $\int 6dx$

Se trata de una integral del tipo:

$$\int kdx = kx + C,$$

luego se calcula como:

$$\int 6dx = 6x + C.$$

b) $\int 8xdx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int kx^n dx = k\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ si } n \neq -1,$$

luego:

$$\int 8xdx = 8\frac{x^2}{2} + C = 4x^2 + C.$$

c) $\int \frac{2}{x^2} dx$

Análogamente al ejercicio anterior, se tiene:

$$\int \frac{2}{x^2} dx = \int 2x^{-2} dx = 2\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{-2}{x} + C.$$

d) $\int \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

Análogamente al ejercicio anterior, se tiene:

$$\int \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \int 2x^{-3/5} dx = 2\frac{x^{2/5}}{2/5} + C = 5x^{2/5} + C = 5\sqrt[5]{x^2} + C.$$

e) $\int \frac{3x^4}{2\sqrt[7]{x^6}} dx$

Se reescribe la integral y se tiene:

$$\int \frac{3x^4}{2\sqrt[7]{x^6}} dx = \frac{3}{2} \int x^4 x^{-6/7} dx = \frac{3}{2} \int x^{22/7} dx$$

$$= \frac{3}{2} \frac{x^{29/7}}{(29/7)} + C = \frac{21}{58} x^{29/7} + C = \frac{21}{58} \sqrt[7]{x^{29}} + C.$$

—— ∞ ——

Problema 8.6. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{10}{x} dx$ **b)** $\int 3e^x dx$ **c)** $\int 5^x dx$ **d)** $\int 7^x 2dx$

Solución.

a) $\int \frac{10}{x} dx$

La integral a calcular es de forma logarítmica:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

luego:

$$\int \frac{10}{x} dx = 10 \int \frac{1}{x} dx = 10 \ln|x| + C.$$

b) $\int 3e^x dx$

La integral a calcular es de una función exponencial:

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

luego:

$$\int 3e^x dx = 3\int e^x dx = 3e^x + C.$$

c) $\int 5^x dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

entonces:

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

d) $\int 7^x 2dx$

Como en el caso anterior, se tiene:

$$\int 7^x 2dx = 2\int 7^x dx = 2\frac{7^x}{\ln 7} + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.7. Calcula las siguientes integrales trigonométricas:

a) $\int 2\operatorname{sen} x dx$ **b)** $\int 3 + 3\tan^2 x dx$ **c)** $\int \frac{1}{3\operatorname{sen}^2 x} dx$

d) $\int 2\cot x \csc x dx$ **e)** $\int \cot^2 x dx$

Solución.

a) $\int 2\operatorname{sen} x dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C,$$

luego:

$$\int 2\operatorname{sen} x dx = 2\int \operatorname{sen} x dx = -2\cos x + C.$$

b) $\int 3+3\tan^2 x dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int 1+\tan^2 x dx = \tan x + C,$$

luego:

$$\int 3+3\tan^2 x dx = \int 3(1+\tan^2 x)dx = 3\int (1+\tan^2 x)dx = 3\tan x + C.$$

c) $\int \frac{1}{3\operatorname{sen}^2 x} dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\cot x + C,$$

luego:

$$\int \frac{1}{3}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\frac{1}{3}\cot x + C.$$

d) $\int 2\cot x \csc x dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int -\cot x \csc x dx = \csc x + C,$$

luego:

$$\int (-2)(-\cot x \csc x)\, dx = -2\int -\cot x \csc x dx = -2\csc x + C.$$

e) $\int \cot^2 x dx$

Se reescribe la integral como:

$$\int \cot^2 x dx = \int 1+\cot^2 x - 1 dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1 dx = -\cot x - x + C$$

—— ∞ ——

Problema 8.8. Calcula las siguientes integrales de funciones trigonométricas inversas:

a) $\int \frac{2}{3\sqrt{1-x^2}}dx$ **b)** $\int \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

c) $\int \frac{5}{2+2x^2}dx$ **d)** $\int \frac{6}{\sqrt{4-4x^2}}dx$

Solución.

a) $\int \frac{2}{3\sqrt{1-x^2}}dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arc\,sen} x + C,$$

entonces:

$$\int \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{3}\operatorname{arc\,sen} x + C.$$

b)$\int \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + C,$$

por tanto,

$$\int 3\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 3\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 3\arccos x + C.$$

c) $\int \frac{5}{2+2x^2}dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C,$$

luego,

$$\int \frac{5}{2+2x^2}dx = \int \frac{5}{2(1+x^2)}dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{5}{2}\arctan x + C.$$

d) $\int \frac{6}{\sqrt{4-4x^2}}dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arc\,sen} x + C,$$

luego:

$$\int \frac{6}{\sqrt{4-4x^2}}dx = \int \frac{6}{\sqrt{4(1-x^2)}}dx = \int \frac{6}{2\sqrt{(1-x^2)}}dx$$
$$= 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 3\operatorname{arc\,sen} x + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.9. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2}{x} + \frac{-2}{x^2}dx$

b) $\int x^4 + 3e^x + 2^x dx$

c) $\int 6x\,(3x^2+2)^3 dx$

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-5}}dx$

e) $\int \cos x \operatorname{sen}^3 x dx$

f) $\int \operatorname{sen} 2x \cos^4 2x dx$

g) $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$

Solución.

a) $\int \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2}{x} + \frac{-2}{x^2}dx$

La integral es una suma de integrales que pueden resolverse por la regla de las funciones trigonométricas inversas, la regla del logaritmo neperiano, y la regla de las potencias, luego se tiene:

$$\int \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2}{x} + \frac{-2}{x^2}dx = \int \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{-2}{x}dx + \int \frac{-2}{x^2}dx$$
$$= 2\arccos x - 2\ln|x| + \frac{2}{x} + C.$$

b) $\int x^4 + 3e^x + 2^x dx$

La integral es una suma de integrales que pueden resolverse por la regla de las potencias y por la regla de la función exponencial, luego se tiene:

$$\int x^4+3e^x+2^x dx = \int x^4 dx+\int 3e^x dx+\int 2^x dx = \frac{x^5}{5}+3e^x+\frac{2^x}{\ln 2}+C.$$

c) $\int 6x\,(3x^2+2)^3 dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int f'(x)\,[f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \text{si } n \neq -1,$$

sea $f(x) = 3x^2+2$, luego $f'(x) = 6x$ y $n = 3$, por tanto:

$$\int 6x\,(3x^2+2)^3 dx = \frac{(3x^2+2)^4}{4} + C.$$

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-5}} dx$

Como en el caso anterior, sea $f(x) = x^3 - 5$, luego $f'(x) = 3x^2$, $n = -\frac{1}{2}$, multiplicando y dividiendo por 3 se tiene:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-5}} dx = \int x^2(x^3-5)^{-1/2} dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3-5)^{-1/2} dx$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(x^3-5)^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C = \frac{2\sqrt{x^3-5}}{3} + C.$$

e) $\int \cos x \operatorname{sen}^3 x dx$

Como en el caso anterior, se trata de una potencia $f(x) = \operatorname{sen} x$, luego $f'(x) = \cos x$ y $n = 3$.

$$\int \cos x \operatorname{sen}^3 x dx = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C.$$

f) $\int \operatorname{sen} 2x \cos^4 2x dx$

Como en el caso anterior, se trata de una potencia $f(x) = \cos 2x$, luego $f'(x) = 2 \operatorname{sen} 2x$ y $n = 4$, y multiplicando y dividiendo por 2 se tiene:

$$\int \operatorname{sen} 2x \cos^4 2x dx = \frac{1}{2}\int 2 \operatorname{sen} 2x \cos^4 2x dx = \frac{1}{2}\frac{\cos^5 2x}{5} + C.$$

g) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

Como en el caso anterior, se trata de una potencia $f(x) = \ln x$, luego $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $n = 3$.

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.10. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 2e^{2x} - 2x \operatorname{sen}(x^2) dx$ **b)** $\int x3^{x^2} dx$

c) $\int \frac{1}{2^x} dx$ **d)** $\int 5^{2x+3} dx$

Solución.

a) $\int 2e^{2x} - 2x \operatorname{sen}(x^2) dx$

El primer sumando de la integral es de la forma:

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C,$$

con $f(x) = 2x$ y $f'(x) = 2$, y el segundo sumando es de la forma:

$$\int f'(x) \operatorname{sen} f(x) dx = -\cos f(x) + C,$$

con $f(x) = x^2$ y $f'(x) = 2x$, por tanto:

$$\int 2e^{2x} - 2x \operatorname{sen}(x^2) dx = e^{2x} - \cos x^2 + C.$$

b) $\int x3^{x^2} dx$

La integral a calcular es de tipo exponencial:

$$\int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C.$$

Sea $f(x) = x^2$, luego $f'(x) = 2x$, por tanto multiplicando y dividiendo por 2 se tiene:

$$\frac{1}{2} \int 2x3^{x^2} dx = \frac{3^{x^2}}{2 \ln 3} + C.$$

c) $\int \frac{1}{2^x} dx$

La integral se puede reescribir como:

$$\int \frac{1}{2^x} dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx.$$

Y resolviendo como en el caso anterior:

$$\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + C = \frac{1}{2^x (\ln 1 - \ln 2)} + C = \frac{-1}{2^x \ln 2} + C.$$

d) $\int 5^{2x+3} dx$

La integral se puede reescribir como:

$$\int 5^{2x+3} dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot 5^{2x+3} dx = \frac{1}{2} \frac{5^{2x+3}}{\ln 5} + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.11. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx$ b) $\int \frac{x^4}{x^5 - a^5} dx$

c) $\int \tan 2x dx$ d) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} dx$

Solución.

a) $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C,$$

sea $f(x) = x^3 + 2x$, luego $f'(x) = 3x^2 + 2$, por tanto:

$$\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx = \ln \left|x^3 + 2x\right| + C.$$

b) $\int \frac{x^4}{x^5 - a^5}dx$

La integral a calcular es de tipo logarítmico, donde $f(x) = x^5 - a^5$, y $f'(x) = 5x^4$. Luego multiplicando y dividiendo por 5 se tiene:

$$\int \frac{x^4}{x^5 - a^5}dx = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{x^5 - a^5}dx = \ln\left|x^5 - a^5\right| + C.$$

c) $\int \tan 2x dx$

Como es conocido $\tan 2x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$, por tanto se tiene:

$$\int \tan 2x dx = \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}dx,$$

y por la regla del logaritmo se tiene:

$$\int \tan 2x dx = \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C.$$

d) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}dx$

La integral a calcular es de tipo logarítmico, donde $f(x) = 1 + \cos x$, y $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}dx$$

$$= -\ln|1 + \cos x| + C = \ln\frac{1}{|1 + \cos x|} + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.12. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{6x^2 + 1}{\cos^2(4x^3 + 2x)}dx$ b) $\int \frac{5x^3 + 3/4}{\operatorname{sen}^2(5x^4 + 3x)}dx$

c) $\int \frac{2x^3 + e^{2x}}{1 + (x^4 + e^{2x})^2}dx$ d) $\int \frac{1}{9 + x^2}dx$

e) $\int \frac{e^{4x} + 2x}{\sqrt{1 - (e^{4x} + 4x^2)^2}}dx$ f) $\int \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 1}dx$

Solución.

a) $\int \dfrac{6x^2+1}{\cos^2(4x^3+2x)}dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \tan f(x) + C.$$

Sea $f(x) = 4x^3 + 2x$, luego $f'(x) = 12x^2 + 2$, por tanto multiplicando y dividiendo por 2 se tiene:

$$\int \frac{6x^2+1}{\cos^2(4x^3+2x)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{12x^2+2}{\cos^2(4x^3+2x)}dx = \frac{1}{2}\tan\left(4x^3+2x\right)+C.$$

b) $\int \dfrac{5x^3+3/4}{\operatorname{sen}^2(5x^4+3x)}dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}dx = -\cot f(x) + C.$$

Sea $f(x) = 5x^4 + 3x$, luego $f'(x) = 20x^3 + 3$, por tanto multiplicando y dividiendo por 4 se tiene:

$$\int \frac{5x^3+3/4}{\operatorname{sen}^2(5x^4+3x)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{20x^3+3}{\operatorname{sen}^2(5x^4+3x)}dx = -\frac{1}{4}\cot\left(5x^4+3x\right)+C.$$

c) $\int \dfrac{2x^3+e^{2x}}{1+(x^4+e^{2x})^2}dx$

La integral a calcular es de la forma:

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \arctan f(x) + C.$$

Sea $f(x) = x^4 + e^{2x}$, luego $f'(x) = 4x^3 + 2e^{2x}$, por tanto multiplicando y dividiendo por 2 se tiene:

$$\int \frac{2x^3+e^{2x}}{1+(x^4+e^{2x})^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x^3+2e^{2x}}{1+(x^4+e^{2x})^2}dx = \frac{1}{2}\arctan(x^4+e^{2x})+C.$$

d) $\int \frac{1}{9+x^2}dx$
La integral a calcular es un arcotangente y se puede reescribir como:

$$\int \frac{1}{9+x^2}dx = \int \frac{1}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)}dx = \int \frac{1/9}{\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1/3}{\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)}dx = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C.$$

e) $\int \frac{e^{4x}+2x}{\sqrt{1-(e^{4x}+4x^2)^2}}dx$
La integral a calcular es de la forma:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = \operatorname{arc\,sen} f(x) + C.$$

Sea $f(x) = e^{4x}+4x^2$, luego $f'(x) = 4e^{4x}+8x$, por tanto multiplicando y dividiendo por 4 se tiene:

$$\int \frac{e^{4x}+2x}{\sqrt{1-(e^{4x}+4x^2)^2}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4e^{4x}+8x}{\sqrt{1-(e^{4x}+4x^2)^2}}dx$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen}\left(e^{4x}+4x^2\right) + C.$$

f) $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1}dx$
La integral se puede escribir como:

$$\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx + \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx.$$

El primer sumando es del tipo logarítmico con $f(x) = 1+e^{2x}$, luego $f'(x) = 2e^{2x}$, y multiplicando y dividiendo por 2, se tiene:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\ln\left|1+e^{2x}\right| + C.$$

El segundo sumando es trigonométrica inversa con $f(x) = e^x$, luego $f'(x) = e^x$, y por tanto se tiene:

$$\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx = \arctan(e^x) + C.$$

Finalmente, se tiene:

$$\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|1+e^{2x}\right| + \arctan(e^x) + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.13. Calcula las siguientes integrales usando el método de sustitución:

a) $\int (2x+3)^3 dx$ **b)** $\int \frac{x}{2x+1}dx$ **c)** $\int x^4 e^{(x^5+1)}dx$

d) $\int \sqrt{5x-2}dx$.

Solución.

a) $\int (2x+3)^3 dx$

Se aplica el método de sustitución:

i) Escoger una sustitución $u = u(x)$ que simplifique el integrando $f(x)$, en este caso sea $u = 2x+3$.

ii) Hallar $du = u'(x)dx$, luego se tiene $du = 2 \cdot dx$, y por tanto $\frac{1}{2}du = dx$.

iii) Escribir la integral en términos de u y du

$$\int (2x+3)^3 dx = \int u^3 \frac{1}{2}du.$$

iv) Calcular la integral obtenida en el paso iii)

$$\frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2}\frac{u^4}{4} + C.$$

v) Deshacer el cambio, sustituyendo u por $u(x) = 2x+3$ en la primitiva se tiene:

$$\int (2x+3)^3 dx = \frac{(2x+3)^4}{8} + C.$$

b) $\int \frac{x}{2x+1} dx$

En el método de integración por sustitución si hay una fracción se intenta elegir como u el denominador, luego:

i) $u = 2x + 1$.

ii) $du = 2 \cdot dx$, y por tanto $\frac{1}{2} du = dx$.

iii) Para que no queden x ni dx en la nueva integral, se sustituye también $x = \frac{u-1}{2}$ y, por tanto,

$$\int \frac{x}{2x+1} dx = \int \frac{u-1}{2u} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \left(\frac{u}{2u} - \frac{1}{2u} \right) du.$$

iv) Se tiene la integral de una diferencia que es la diferencia de las integrales, y en este caso estas son inmediatas:

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2u} \right) du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} du - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u} \right) du = \frac{1}{4} u - \frac{1}{4} \ln |u| + C.$$

v) Y deshaciendo el cambio, se tiene:

$$\int \frac{x}{2x+1} dx = \frac{1}{4} u - \frac{1}{4} \ln |u| + C = \frac{1}{4}(2x+1) - \frac{1}{4} \ln |2x+1| + C.$$

c) $\int x^4 e^{(x^5+1)} dx$

En el método de integración por sustitución si hay una función exponencial, se intenta elegir como u el exponente, luego:

i) $u = x^5 + 1$.

ii) $du = 5x^4 dx$.

iii) Como el 5 no forma parte del integrando se multiplica y divide por 5 y sustituyendo:

$$\int x^4 e^{(x^5+1)} dx = \frac{1}{5} \int 5x^4 e^{(x^5+1)} dx = \frac{1}{5} \int e^u du.$$

iv) Se tiene la integral de una exponencial que es inmediata:

$$\frac{1}{5} \int e^u du = \frac{1}{5} e^u + C.$$

v) Y deshaciendo el cambio, se tiene:

$$\int x^4 e^{(x^5+1)}dx = \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{(x^5+1)} + C.$$

d) $\int \sqrt{5x-2}dx$

En el método de integración por sustitución si hay un radicando se intenta elegir como u la expresión que hay dentro del mismo:

i) $u = 5x - 2$.

ii) $du = 5dx$.

iii) Como el 5 no forma parte del integrando se multiplica y divide por 5 y sustituyendo:

$$\int \sqrt{5x-2}dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{5x-2}\cdot 5dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{u}du.$$

iv) Se tiene la integral de una potencia que es inmediata:

$$\frac{1}{5}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{5}\int u^{1/2}du = \frac{1}{5}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{15}u^{3/2} + C.$$

v) Y deshaciendo el cambio, se tiene:

$$\int \sqrt{5x-2}dx = \frac{2}{15}u^{3/2} + C = \frac{2}{15}\sqrt{u^3} + C = \frac{2}{15}\sqrt{(5x-2)^3} + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.14. Calcula las siguientes integrales, aplicando el cambio de variable indicado entre paréntesis:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $(x = \operatorname{sen} u)$ **b)** $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$, $(x = u^2)$

Solución.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $(x = \operatorname{sen} u)$

i) $x = \operatorname{sen} u$.

ii) $dx = \cos t dt$.

iii) Se reescribe la integral en función de u

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\cos u}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}}du$$
$$= \int \frac{\cos u}{\sqrt{\cos^2 u}}du = \int du.$$

iv) Se tiene una integral inmediata

$$\int du = u + C.$$

v) Y deshaciendo el cambio, como $x = \operatorname{sen} u$, entonces $u = \operatorname{arc\,sen} x$ y, por tanto, se tiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = u + C = \operatorname{arc\,sen} x + C.$$

b) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$, $(x = u^2)$

i) $x = u^2$.

ii) $dx = 2udu$.

iii) Se reescribe la integral en función de u

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+u^2}{1+\sqrt{u^2}}2udu$$
$$= \int \frac{(1+u^2)\,2u}{1+u}du = 2\int \frac{u+u^3}{1+u}du.$$

iv) Ahora se puede proceder a realizar la división de polinomios y se tiene que la integral se puede escribir como:

$$2\int \frac{u^3+u}{u+1}dt = 2\int \left(\frac{-2}{1+u} + u^2 - u + 2\right)du,$$

donde todos los sumandos se pueden integrar de forma directa

$$2\int \left(\frac{-2}{1+u} + u^2 - u + 2\right)du$$
$$= 2\left(-2\ln|1+u| + \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + 2u\right) + C.$$

v) Y deshaciendo el cambio, como $x = u^2$, entonces $u = \sqrt{x}$ y, por tanto, se tiene:

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx = -4\ln|1+u| + \frac{2u^3}{3} - u^2 + 4u + C$$

$$= -4\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + \frac{2x\sqrt{x}}{3} - x + 4\sqrt{x} + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.15. Halla la integral:

$$\int (x^2+1)\ln 3x dx.$$

Solución.

Se va a resolver la integral por el método de integración por partes:

i) Escoger funciones u y v tales que $f dx = udv$, y siguiendo la regla LIATE como hay un logaritmo, este será la u,

$$u = \ln 3x, \quad dv = \left(x^2+1\right)dx.$$

ii) Hallar $du = u'(x)dx$ y $v = \int dv$, y se tiene:

$$du = \frac{3}{3x}dx = \frac{1}{x}dx \quad v = \int x^2 + 1 dx = \frac{x^3}{3} + x.$$

iii) Sustituir en la fórmula de integración por partes:

$$\int f dx = \int udv = uv - \int vdu.$$

$$\int (x^2+1)\ln 3x dx = \ln 3x \cdot \left(\frac{x^3}{3} + x\right) - \int \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\frac{1}{x}dx.$$

iv) Hallar $\int vdu$:

$$\int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} + x\frac{1}{x}dx = \int \frac{x^2}{3} + 1dx = \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + x = \frac{x^3}{9} + x.$$

v) Obtener el resultado final sustituyendo lo obtenido en el paso iv) en la fórmula del paso iii):

$$\int (x^2+1)\ln 3x dx = \ln 3x \cdot \left(\frac{x^3}{3}+x\right) - \int \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{1}{x}dx$$
$$= \ln 3x \cdot \left(\frac{x^3}{3}+x\right) - \left(\frac{x^3}{9}+x\right) + C.$$

—— ∞ ——

Problema 8.16. Halla la integral:

$$\int \arctan x dx.$$

Solución.

Se va a resolver la integral por el método de integración por partes:

i) Siguiendo la regla LIATE como hay una función trigonométrica inversa, esta será la u,

$$u = \arctan x, \quad dv = dx.$$

ii) Hallar $du = u'(x)dx$ y $v = \int dv$, y se tiene:

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx, \quad v = \int dx = x.$$

iii) Sustituir en la fórmula de integración por partes:

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int x\frac{1}{1+x^2}dx.$$

iv) Hallar $\int vdu$:

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

v) Obtener el resultado final sustituyendo lo obtenido en el paso iv) en la fórmula del paso iii):

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int x\frac{1}{1+x^2}dx$$
$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

—— ∞ ——

Problema 8.17. Halla la integral:

$$\int xe^{3x}dx.$$

Solución.

Se va a resolver la integral por el método de integración por partes:

i) Siguiendo la regla LIATE la función algebraica será la u,

$$u = x, \quad dv = e^{3x}dx.$$

ii) Hallar $du = u'(x)dx$ y $v = \int dv$, y se tiene:

$$du = dx \quad v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

iii) Sustituir en la fórmula de integración por partes:

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx.$$

iv) Hallar $\int vdu$:

$$\int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{1}{9}e^{3x}.$$

v) Obtener el resultado final sustituyendo lo obtenido en el paso iv) en la fórmula del paso iii):

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx$$

$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C = \frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.18. Halla la integral:

$$\int e^{x}\cos x dx.$$

Solución.

Se va a resolver la integral por el método de integración por partes:

i) Se elige:

$$u = \cos x, \quad dv = e^x dx.$$

ii) Se hallan du y v y se tiene:

$$du = -\operatorname{sen} x dx, \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

iii) Se sustituye en la fórmula:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int \operatorname{sen} x e^x dx.$$

iv) Hallar $\int v du$, que en este caso debe volverse a hallar mediante integración por partes, donde:

a) Se elige:

$$u = \operatorname{sen} x, \quad dv = e^x dx.$$

b) Se hallan du y v y se tiene:

$$du = \cos x dx, \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

c) Se sustituye en la fórmula:

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx.$$

d) Hallar $\int v du$, que coincide con la integral original del problema, a la que se denomina:

$$I = \int e^x \cos x dx.$$

e) Obtener el resultado final sustituyendo lo obtenido en el paso d) en la fórmula del paso c), luego

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - I.$$

v) Obtener el resultado final sustituyendo lo obtenido en el paso iv) en la fórmula del paso iii):

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - I,$$

$$2I = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x,$$

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x (\cos x + \operatorname{sen} x)}{2} + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.19. Halla la integral:

$$\int x^2 \cos x dx.$$

Solución.

Se va a resolver la integral por el método de integración por partes:

i) Siguiendo la regla LIATE la función algebraica será la u,

$$u = x^2, \quad dv = \cos x dx.$$

ii) Se hallan $du = u'(x)dx$ y $v = \int dv$, y se tiene:

$$du = 2xdx \quad v(x) = \operatorname{sen} x.$$

iii) Sustituir en la fórmula de integración por partes:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x dx.$$

iv) Hallar $\int v du = \int x \operatorname{sen} x dx$, que en este caso debe volverse a hallar mediante integración por partes, luego:

a y b) Se elige

$$u = x, \quad dv = \operatorname{sen} x dx,$$

$$du = dx, \quad v = -\cos x.$$

c) Se sustituye en la fórmula:

$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx.$$

d) Se halla $\int v du$, que ahora es inmediata:

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C.$$

e) Y se obtiene el resultado de la integral:

$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

v) Obtener el resultado final sustituyendo lo obtenido en el paso iv) en la fórmula del paso iii)

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2(-x \cos x + \operatorname{sen} x) + C$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C.$$

—— ∞ ——

Problema 8.20. Halla la integral:

$$\int x^3 \cos x dx.$$

Solución.

En este caso vamos a utilizar el método de integración tabular.

Para calcular las integrales por partes en el caso de productos de polinomios por funciones exponenciales o logarítmicas directas, se pueden disponer los cálculos en una tabla. En la primera columna se escribe el polinomio y sus derivadas hasta que se anule y en la segunda columna se escribe la función exponencial o trigonométrica directa y sus integrales.

A continuación, se realizan los productos en diagonal como se indica en la siguiente tabla y se suman alternando los signos,

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Derivadas de } u & & \text{Integrales de } dv \\
u & & \int dv = v \\
& \overset{+}{\searrow} & \\
u' & & \int v \\
& \overset{-}{\searrow} & \\
u'' & & \int \int v \\
& \vdots &
\end{array}
$$

dando lugar a que la integral sea:

$$u\int v-u'\int\int v+u''\int\int\int v-u'''\int\int\int\int v+\cdots+C$$

Para mas información se puede consultar el siguiente artículo: Horowitz, D. (1990). Tabular integration by parts. *The College Mathematics Journal*, 21(4), 307-311.

Aplicando el método al problema se tiene:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Derivadas de } u=x^3 & & \text{Integrales de } dv=\cos x dx \\
u=x^3 & & dv=\cos x dx \\
 & \overset{+}{\searrow} & \\
u'=3x^2 & & \operatorname{sen} x \\
 & \overset{-}{\searrow} & \\
u''=6x & & -\cos x \\
 & \overset{+}{\searrow} & \\
u'''=6 & & -\operatorname{sen} x \\
 & \overset{-}{\searrow} & \\
u^{(4}=0 & & \cos x
\end{array}$$

$$\int x^3\cos x dx=x^3\operatorname{sen} x-3x^2\left(-\cos x\right)+6x\left(-\operatorname{sen} x\right)-6\cos x+C$$

——— ∞ ———

Problema 8.21. Halla la integral:

$$I=\int e^{-2x}\operatorname{sen}(3x+1)dx.$$

Solución.

Se va a resolver la integral por el método de integración por partes:

i) ii) Siguiendo la regla LIATE como hay una función exponencial, esta será la u, y se hallan du y v, y se tiene:

$$u=e^{-2x},\quad dv=\operatorname{sen}(3x+1)dx,$$

$$du=-2e^{-2x}dx,\quad v=\frac{-\cos(3x+1)}{3}.$$

iii) Sustituir en la fórmula de integración por partes:

$$I = e^{-2x}\left(\frac{-\cos(3x+1)}{3}\right) - \int \left(-2e^{-2x}\right)\left(\frac{-\cos(3x+1)}{3}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-2x}\cos(3x+1) - \frac{2}{3}\int e^{-2x}\cos(3x+1)dx.$$

iv) Hallar $\int vdu = \int e^{-2x}\cos(3x+1)dx$, que en este caso debe volverse a hallar mediante integración por partes, donde:

a) b) Se elige

$$u = e^{-2x}, \quad dv = \cos(3x+1)dx,$$

$$du = -2e^{-2x}dx, \quad v = \frac{\operatorname{sen}(3x+1)}{3}$$

c) Se sustituye en la fórmula

$$\int e^{-2x}\cos(3x+1)dx$$

$$= \left(e^{-2x}\left(\frac{\operatorname{sen}(3x+1)}{3}\right) - \int \left(-2e^{-2x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}(3x+1)}{3}\right) dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen}(3x+1) + \frac{2}{3}\int e^{-2x}\operatorname{sen}(3x+1)dx.$$

d) Hallar $\int vdu$, que coincide con la integral original del problema, a la que se denomina:

$$I = \int e^{-2x}\operatorname{sen}(3x+1)dx.$$

e) Obtener el resultado final sustituyendo lo obtenido en el paso d) en la fórmula del paso c), luego

$$\int e^{-2x}\cos(3x+1)dx = \frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen}(3x+1) + \frac{2}{3}I.$$

v) Obtener el resultado final sustituyendo lo obtenido en el paso iv) en la fórmula del paso iii)

$$I = \int e^{-2x}\operatorname{sen}(3x+1)dx$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-2x}\cos(3x+1) - \frac{2}{3}\int e^{-2x}\cos(3x+1)dx$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-2x}\cos(3x+1) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen}(3x+1) + \frac{2}{3}I\right)$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-2x}\cos(3x+1) - \frac{2}{9}e^{-2x}\operatorname{sen}(3x+1) - \frac{4}{9}I.$$

Por tanto,

$$I + \frac{4}{9}I = \frac{13}{9}I = -\frac{1}{3}e^{-2x}\cos(3x+1) - \frac{2}{9}e^{-2x}\operatorname{sen}(3x+1),$$

$$I = -\frac{3e^{-2x}\cos(3x+1)}{13} - \frac{2e^{-2x}\operatorname{sen}(3x+1)}{13} + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.22. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{10}{x^2-25}dx.$$

Solución.

Se trata de una integral racional que se puede escribir como:

$$\int \frac{10}{x^2-25}dx = \int \frac{10}{(x+5)(x-5)}dx$$

$$= \int \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-5}dx.$$

Igualando los integrandos se tiene:

$$\frac{10}{(x+5)(x-5)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-5},$$

e igualando numeradores:

$$10 = A(x-5) + B(x+5).$$

Y ahora igualando los coeficientes de los polinomios se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -5A + 5B = 10 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $A = -1$, $B = 1$, por tanto:

$$\int \frac{10}{x^2-25}dx = \int \frac{-1}{x+5} + \frac{1}{x-5}dx$$

$$= -\ln|x+5| + \ln|x-5| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.23. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{5x-4}{x^2-x-2}dx.$$

Solución.

La integral se puede escribir como:

$$\int \frac{5x-4}{x^2-x-2}dx = \int \frac{5x-4}{(x-2)(x+1)}dx$$

$$= \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}dx,$$

de donde se tiene:

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}.$$

Igualando los numeradores:

$$5x-4 = A(x+1) + B(x-2).$$

Y ahora igualando los coeficientes de los polinomios se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ A - 2B = -4 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $A = 2$, $B = 3$, por tanto:

$$\int \frac{5x-4}{x^2-x-2}dx = \int \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1}dx$$

$$= 2\ln|x-2| + 3\ln|x+1| + C.$$

—— ∞ ——

Problema 8.24. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{6x^2-17x+1}{x^3-4x^2+x+6}dx.$$

Solución.

La integral se puede escribir como:

$$\int \frac{6x^2-17x+1}{x^3-4x^2+x+6}dx = \int \frac{6x^2-17x+1}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$$

$$= \int \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}dx.$$

Igualando los integrandos se tiene:

$$\frac{6x^2-17x+1}{x^3-4x^2+x+6}$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x-3)}.$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$6x^2 - 17x + 1 = (A+B+C)\,x^2 + (-5A-2B-C)\,x + (6A-3B-2C)\,.$$

Y ahora igualando los coeficientes de los polinomios se obtiene el sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} A+B+C=6 \\ -5A-2B-C=-17 \\ 6A-3B-2C=1 \end{array}\right.$$

cuyas soluciones son $A=2$, $B=3$, y $C=1$, por tanto:

$$\int \frac{6x^2-17x+1}{x^3-4x^2+x+6}dx = \int \frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x-3}dx$$

$$= 2\ln|x+1|+3\ln|x-2|+\ln|x-3|+C.$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene:

$$= \ln\left[|x+1|^2|x-2|^3|x-3|\right]+C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.25. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx.$$

Solución.

Se buscan las raíces del denominador, como es una ecuación bicuadrada se hace la siguiente sustitución $x^2=y$,

$$y^2-5y+4=0 \Longleftrightarrow (y-4)(y-1)=0,$$

luego, las raíces buscadas, deshaciendo el cambio, son $x=\pm\sqrt{y}$, luego:

$$x_1=2,\ x_2=-2,\ x_3=1,\ \text{y}\ x_4=-1,$$

de forma que la integral se puede escribir como:

$$\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx = \int \frac{x^2-x+2}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}dx$$

$$\int \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}dx.$$

Igualando los integrandos se tiene:

$$\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}=\frac{A(x+2)(x^2-1)+B(x-2)(x^2-1)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}$$

$$+\frac{C(x^2-4)(x+1)+D(x^2-4)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)},$$

$$x^2-x+2=A(x+2)(x^2-1)+B(x-2)(x^2-1)$$

$$+C(x^2-4)(x+1)+D(x^2-4)(x-1).$$

Y ahora igualando los coeficientes de los polinomios se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} A+B+C+D=0 \\ 2A-2B+C-D=1 \\ -A-B-4C-4D=-1 \\ -2A+2B-4C+4D=2 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{-2}{3}$, $C=\frac{-1}{3}$, $D=\frac{2}{3}$, por tanto:

$$\int\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx=\int\frac{1/3}{x-2}+\frac{-2/3}{x+2}+\frac{-1/3}{x-1}+\frac{2/3}{x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{2}{3}\ln|x+2|-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{2}{3}\ln|x+1|+C.$$

Usando las propiedades de los logaritmos:

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x-2)(x+1)^2}{(x+2)^2(x-1)}\right|+C$$

$$=\ln\sqrt[3]{\left|\frac{(x-2)(x+1)^2}{(x+2)^2(x-1)}\right|}+C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.26. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx.$$

Solución.

La integral se puede escribir como

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{x+1}{(x-1)^2}dx.$$

Como los factores son lineales y están repetidos, con multiplicidad

$$m = 2,$$

se puede escribir

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}dx.$$

Igualando los integrandos se tiene:

$$\frac{x+1}{x^2-2x+1} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}.$$

De donde

$$x+1 = Ax - A + B.$$

Y ahora igualando los coeficientes de los polinomios se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} A = 1 \\ -A + B = 1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$A = 1,\ B = 2,$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx &= \int \frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2}dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{(x-1)} + C. \end{aligned}$$

——— ∞ ———

Problema 8.27. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-5x+3}dx.$$

Solución.

La integral se puede escribir como

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-5x+3}dx = \int \frac{x+1}{(x+3)(x-1)^2}dx$$
$$= \int \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}dx.$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)}{(x+3)(x-1)^2}$$
$$= \frac{(A+B)\,x^2 + (-2A+2B+C)\,x + (A-3B+3C)}{(x+3)(x-1)^2}.$$

Y ahora igualando los coeficientes de los polinomios se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=1 \\ A-3B+3C=1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $A=-1/8$, $B=1/8$, y $C=1/2$, por tanto:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-5x+3}x = \int \frac{-1/8}{x+3} + \frac{1/8}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2}dx$$
$$= -\frac{1}{8}\ln|x+3| + \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + C$$
$$= \frac{1}{8}\ln\frac{|x-1|}{|x+3|} - \frac{1}{2(x-1)} + C$$
$$= \ln\sqrt[8]{\left|\frac{x-1}{(x+3)}\right|} - \frac{1}{2(x-1)} + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.28. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{x^2\,(1-x^2)}.$$

Solución.

La integral se puede escribir como

$$\int \frac{dx}{x^2\,(1-x^2)}dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x} + \frac{D}{1+x}dx.$$

Igualando los integrandos se tiene:

$$\frac{1}{x^2\,(1-x^2)} = \frac{Ax(1-x^2) + B(1-x^2) + Cx^2(1+x) + Dx^2(1-x)}{x^2\,(1-x^2)}.$$

Y ahora igualando los coeficientes de los polinomios se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} -A + C - D = 0 \\ -B + C + D = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$A = 0,\ B = 1,$$

$$C = \frac{1}{2},\ D = \frac{1}{2},$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2\,(1-x^2)} &= \int \frac{1}{x^2} + \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}dx \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

——— ∞ ———

Problema 8.29. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$$

Solución.

La integral se puede escribir como

$$\int \frac{xdx}{x^3 - x^2 + x - 1} = \int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} = \int \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} dx.$$

Igualando los integrandos se tiene:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)},$$

$$x = (A+M)x^2 + (-M+N)x + (A-N).$$

Y ahora igualando los coeficientes de los polinomios se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} A + M = 0 \\ -M + N = 1 \\ A - N = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $A = \frac{1}{2}$, $M = \frac{-1}{2}$, $N = \frac{1}{2}$, por tanto:

$$\int \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = \int \frac{1/2}{x-1} + \frac{(-1/2)x}{x^2+1} + \frac{1/2}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{-xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{4} \ln \left| x^2 + 1 \right| + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \right| + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.30. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)(x^2+2)} dx.$$

Solución.

La integral se puede escribir como

$$\int \frac{x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)(x^2+2)} dx = \int \frac{Ax + B}{x^2+1} + \frac{Mx+N}{x^2+2} dx.$$

Igualando los numeradores se tiene:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{(Ax+B)(x^2+2) + (Mx+N)(x^2+1)}{(x+1)(x^2+2)},$$

$$x^2 - 2x + 2 = (A+M)x^3 + (B+N)x^2 + (2A+M)x + (2B+N).$$

Y ahora igualando los coeficientes de los polinomios se obtiene el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + M = 0 \\ B + N = 1 \\ 2A + M = -2 \\ 2B + N = 2 \end{array} \right.$$

cuyas solución es

$$A = -2, \ B = 1, \ M = 2, \ N = 0$$

y, por tanto,

$$\int \frac{x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)(x^2+2)} dx = \int \frac{-2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+2} dx$$

$$= -\ln|x^2+1| + \arctan x + \ln|x^2+2| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x^2+2}{x^2+1}\right| + \arctan x + C.$$

——— ∞ ———

Problema 8.31. Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+9} dx.$$

Solución.

La integral se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+1}{x^2+9} dx &= \int \frac{3x}{x^2+9} dx + \int \frac{1}{x^2+9} dx \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx + \int \frac{1}{x^2+3^2} dx \\
&= \frac{3}{2} \ln\left(x^2+9\right) + \int \frac{1/9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx \\
&= \frac{3}{2} \ln\left(x^2+9\right) + \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C.
\end{aligned}$$

——— ∞ ———

Problema 8.32. Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$$

Solución.

La integral es inmediata por la regla de las potencias y aplicando después la regla de Barrow se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int_0^1 (1+x)^{-1/2} dx &= \left.\frac{(x+1)^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 \\
&= 2\sqrt{1+1} - 2\sqrt{0+1} = 2(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

——— ∞ ———

Problema 8.33. Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_1^e \ln x dx.$$

Solución.

Se trata de una integral por partes que se resuelve aplicando la regla LIATE:

$$u = \ln x,\ dv = dx,$$

$$du = \frac{1}{x}dx,\ v = x.$$

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x dx &= x\ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx\\ &= x\ln x]_1^e - x]_1^e\\ &= x\ln x - x]_1^e = 1.\end{aligned}$$

——— ∞ ———

Problema 8.34. Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2+1}dx.$$

Solución.

La integral es inmediata por la regla de la función logaritmo, dividiendo y multiplicando por 2, y aplicando después la regla de Barrow se tiene:

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_2^3 = \frac{1}{2}\left[\ln(3^2+1) - \ln(2^2+1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{5}\right) = \ln\left|\sqrt{2}\right|.$$

——— ∞ ———

Problema 8.35. Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_0^{\pi/4} sen\,(2x)\,dx.$$

Solución.

La integral a calcular es de la forma:

$$\int f'(x)\ \operatorname{sen} f(x)\,dx = -\cos f(x) + C,$$

por tanto, multiplicando y dividiendo por 2 se puede integrar y aplicando la regla de Barrow se tiene:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2\operatorname{sen}(2x)\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}\cos(2x)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{-1}{2}\left(\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \cos(2\cdot 0)\right) = \frac{1}{2}.$$

——— ∞ ———

Problema 8.36. Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_1^3 \frac{x^2+x+2}{x}dx.$$

Solución.

La integral a calcular es una suma de integrales que son inmediatas cada una de ellas, integrando y aplicando la regla de Barrow se tiene:

$$\int_1^3 \frac{x^2+x+2}{x}dx = \int_1^3 xdx + \int_1^3 1dx + \int_1^3 \frac{2}{x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big]_1^3 + x]_1^3 + 2\ln|x|]_1^3$$

$$= \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) + (3-1) + (2\ln(3) - 2\ln(1)) = 6 + 2\ln(3).$$

——— ∞ ———

Problema 8.37. Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx.$$

Solución.

La integral se resuelve mediante el método de sustitución, donde aplicando el método se tiene:

i) $u = 1 + x^3$.

ii) $du = 3x^2 dx$.

iii) $\int_0^2 \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du$.

iv) Integral que es inmediata aplicando la regla de las potencias:

$$\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{1/2} = u^{1/2}.$$

v) Y deshaciendo el cambio, y aplicando después la regla de Barrow se tiene:

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}dx = \sqrt{1+x^3}\,\Big]_0^2 = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 2.$$

——— ∞ ———

Problema 8.38. Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+3}dx.$$

Solución.

La integral se resuelve mediante el método de sustitución, donde aplicando el método se tiene:

i) $u = \sqrt{x}$ y despejando $x = u^2$.

ii) $dx = 2u\,du$.

iii) Los extremos de integración quedan:

$$x = 0 \to u = \sqrt{0} = 0,$$
$$x = 4 \to u = \sqrt{4} = 2,$$

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+3}dx = \int_0^2 \frac{2u}{u+3}du.$$

iv) Se resuelve la integral:

$$\int_0^2 \frac{2u}{u+3}du = 2\int_0^2 \frac{u+3-3}{u+3}du$$
$$= 2\int_0^2 1 - \frac{3}{u+3}du = 2\left(u - 3\ln|u+3|\right)\Big]_0^2$$
$$= 4 - 6\ln 5 - (-6\ln 3) = 4 + 6\ln\frac{3}{5}.$$

——— ∞ ———

Problema 8.39. Calcula el valor de $a > 0$ en la siguiente integral:

$$\int_2^a \left(\frac{x}{2}+3\right)dx = 9.$$

Solución.

La integral a calcular es una suma de integrales que son inmediatas cada una de ellas, integrando y aplicando la regla de Barrow se tiene:

$$\int_2^a \left(\frac{x}{2}+3\right)dx = \int_2^a \frac{x}{2}dx + \int_2^a 3\,dx$$
$$= \frac{x^2}{4} + 3x\Big]_2^a = \left(\frac{a^2}{4}+3a\right) - \left(\frac{2^2}{4}+3\cdot 2\right)$$
$$= \frac{a^2}{4} + 3a - 7.$$

Como se pide determinar el valor de a de forma que el valor de la integral sea igual a 9, se tiene que:

$$\frac{a^2}{4} + 3a - 7 = 9,$$
$$a^2 + 12a - 64 = 0,$$
$$a = -16 \text{ ó } a = 4.$$

Como se pedía el valor de $a > 0$, la solución es $a = 4$.

——— ∞ ———

Problema 8.40. Determina el valor de a para que se verifique:

$$\int_0^a \frac{2x}{(x^2+3)}dx = \frac{1}{12}.$$

Solución.

La integral es inmediata por la regla de la función logaritmo y aplicando después la regla de Barrow se tiene:

$$\int_0^a \frac{2x}{(x^2+3)}dx = \ln(x^2+3)\big]_0^a$$

$$= \ln(a^2+3) - \ln(0+3) = \ln\left(\frac{(a^2+3)}{3}\right).$$

Como se pide determinar el valor de a de forma que el valor de la integral sea igual a $1/12$, se tiene que:

$$\ln\left(\frac{(a^2+3)}{3}\right) = 1/12,$$

$$\frac{(a^2+3)}{3} = e^{1/12},$$

$$a = \pm\sqrt{3e^{1/12} - 3}.$$

Como la integral es $\int_0^a f(x)dx$ entonces $a > 0$ y, por tanto, $a = +\sqrt{3e^{1/12} - 3}$.

——— ∞ ———

Problema 8.41. Halla el área limitada por la curva $f(x) = x^3 - 8$ en el intervalo [2,4].

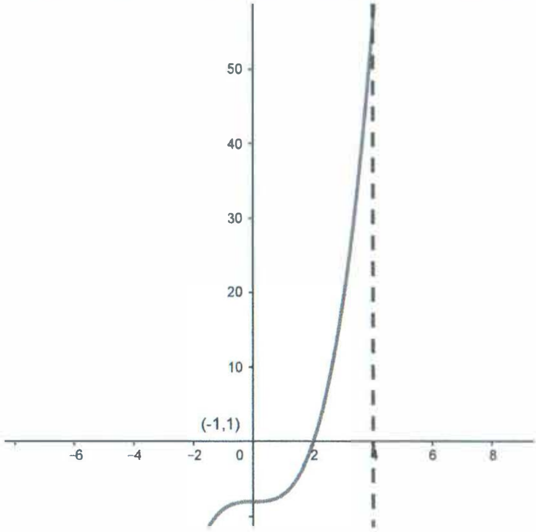
Solución.

El área limitada por una función positiva y el eje OX en un intervalo es la integral definida de la función en el intervalo. Según se puede observar en la figura 8.1, la función en el intervalo [2,4] es positiva, luego el valor del área es

$$Área = \int_a^b f(x)dx = \int_2^4 \left((x^3-8) - 0\right) dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - 8x\Big]_2^4 = (64-32) - (4-16) = 44.$$

Figura 8.1: Área limitada por una curva



—— ∞ ——

Problema 8.42. Halla el área limitada por la curva $f(x) = x^3 - 8$ en el intervalo [0,4].

Solución.

Según se puede observar en la figura 8.1, ahora hay una parte por debajo del eje OX y otra parte por encima del eje OX. El área de una función negativa y el eje OX es igual a la integral definida de la función en el intervalo multipicada por (-1), por tanto, ahora se tiene:

$$Área = \int_a^b (-f(x))\,dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$= \int_0^2 \left(0 - \left(x^3 - 8\right)\right) dx + \int_2^4 \left(\left(x^3 - 8\right) - 0\right) dx$$

$$= -\frac{x^4}{4} + 8x \Big]_0^2 + \frac{x^4}{4} - 8x \Big]_2^4 = (-4 + 16) + (32 - (-12)) = 56.$$

—— ∞ ——

Problema 8.43. Halla el área limitada por las curvas:

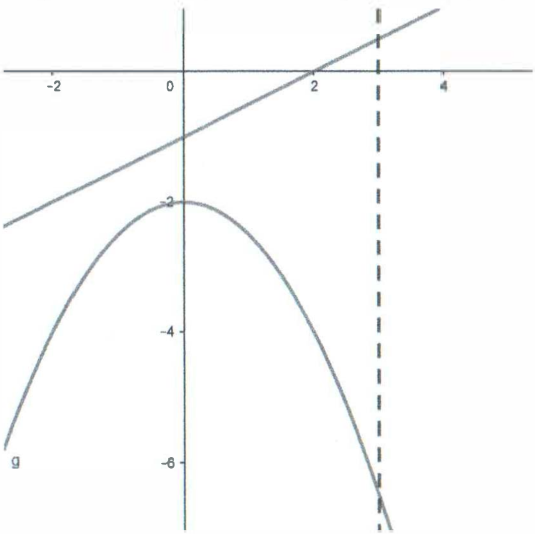
$$f(x) = \frac{x}{2} - 1 \text{ y } g(x) = -\frac{x^2}{2} - 2$$

en el intervalo [0,3].

Solución.

Tal y como se puede observar en la figura 8.2 se cumple que $g(x) \leq f(x)$ para todo x del intervalo $[0, 3]$.

Figura 8.2: Área limitada por dos curvas



Por tanto, el área será la integral definida de la diferencia de funciones:

$$\acute{A}rea = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^3 \left(\frac{x}{2} - 1\right) - \left(-\frac{x^2}{2} - 2\right) dx$$

$$= \int_0^3 \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1 dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + x\Big]_0^3 = \frac{3^3}{6} + \frac{3^2}{4} + 3 = \frac{39}{4} = 9,75.$$

———— ∞ ————

Problema 8.44. Halla el área limitada por las curvas $f(x) = -x^2 + 1$ y $g(x) = 2x + 1$.

Solución.

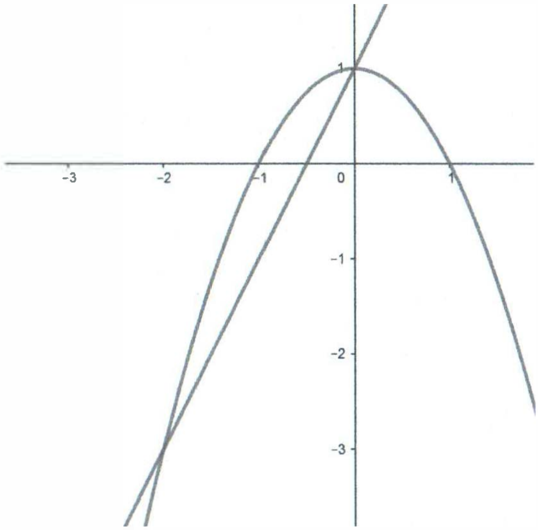
Tal y como se puede observar en la figura 8.3 las curvas se intersecan en dos puntos. Por tanto, en primer lugar, se procede a hallar los puntos de corte, para lo cual se hace:

$$f(x) = g(x) \longrightarrow -x^2 + 1 = 2x + 1$$

$$-x^2 - 2x = 0$$

$$x(-x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Figura 8.3: Área limitada por 2 curvas que se cortan



Una vez conocidos los puntos de corte ya se puede calcular la integral definida, y como en este caso $g(x) \leq f(x)$, entonces :

$$\text{Área} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-2}^{0} (-x^2+1) - (2x+1)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} -x^2 - 2x dx = -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg]_{-2}^{0} = \frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

———— ∞ ————

Problema 8.45. Halla el área limitada por las curvas $f(x) = 3x^3 - x^2 - 11x$ y $g(x) = -x^2 + x$.

Solución.

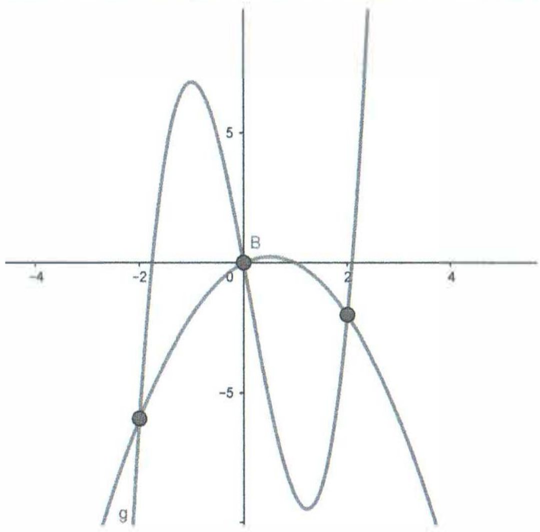
Tal y como se puede observar en la figura 8.4 las curvas se intersecan en tres puntos. Por tanto, en primer lugar, se procede a hallar los puntos de corte:

$$3x^3 - x^2 - 11x = -x^2 + x$$

$$3x^3 - 12x = 0$$

$$x(3x^2 - 12) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \pm 2 \end{cases}$$

Figura 8.4: Área limitada por 2 curvas que se cortan en 3 puntos



Una vez conocidos los puntos de corte ya se puede calcular la integral definida, si bien hay que tener cuidado con qué función es mayor en cada intervalo. Así, se tiene que en el intervalo (-2,0) $f(x) > g(x)$ y en el intervalo (0,2) se da que $g(x) > f(x)$.

$$\text{Área} = \int_a^c (f(x) - g(x))\, dx + \int_c^b (g(x) - f(x))\, dx$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^{0} (3x^3 - x^2 - 11x) - (-x^2 + x)\, dx$$

$$+\int_{0}^{2}(-x^2+x)-(3x^3-x^2-11x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(3x^3-12x)\,dx+\int_{0}^{2}(-3x^3+12x)\,dx$$
$$=\left(\frac{3x^4}{4}-6x^2\right)\Big]_{-2}^{0}+\left(\frac{-3x^4}{4}+6x^2\right)\Big]_{0}^{2}$$
$$=[(0-0)-(12-24)]+[(-12+24)-(0+0)]=24.$$

——— ∞ ———

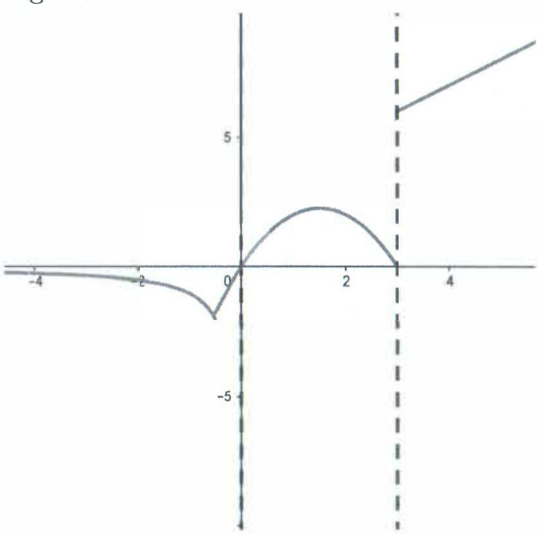
Problema 8.46. Calcula el área limitada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=3$.

$$f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x<-1/2 \\ -x^2+3x & \text{si } -1/2\le x\le 3 \\ |x+3| & \text{si } x>3 \end{cases}$$

Solución.

Tal y como se puede observar en la figura 8.5 las rectas verticales cortan a la función en un único trozo.

Figura 8.5: Área de una función a trozos I



Como la función está definida a trozos, se elige el trozo que está dentro de los límites de integración, y aplicando la regla de Barrow se tiene:

$$Area = \int_a^b f(x)dx = \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right) dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_0^3 = -\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

——— ∞ ———

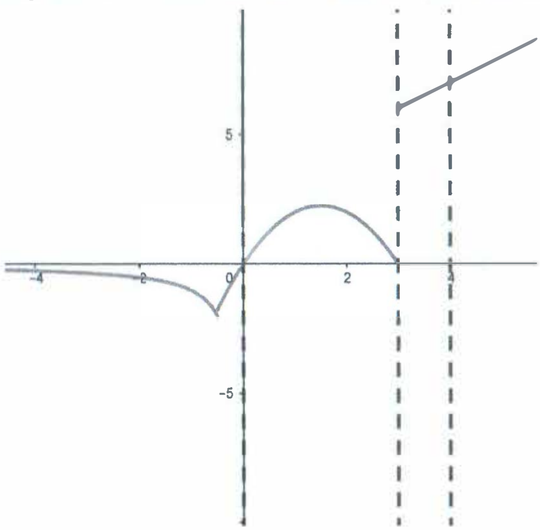
Problema 8.47. Calcula el área limitada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < -1/2 \\ -x^2 + 3x & \text{si } -1/2 \leq x \leq 3 \\ |x+3| & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Solución.

Tal y como se puede observar en la Figura 8.6 las rectas verticales cortan a la función en dos de los trozos.

Figura 8.6: Área de una función a trozos II



Se eligen los trozos que están dentro de cada intervalo de integración, y aplicando la regla de Barrow se tiene:

$$Area = \int_a^b f(x)dx = \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right) dx + \int_3^4 x + 3dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_0^3 + \frac{x^2}{2} + 3x\Big]_3^4$$

$$= -\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} + \frac{4^2}{2} + 12 - \frac{9}{2} - 9 = 11.$$

——— ∞ ———

Problema 8.48. Halla el valor medio de la integral.

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} dx.$$

Solución.

El valor medio o promedio integral viene dado por

$$V = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a} = \frac{\int_0^2 \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} dx}{2-0}$$

y resolviendo la integral, véase el problema 8.37, se tiene:

$$V = \frac{\sqrt{1+x^3}\Big]_0^2}{2} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{1}}{2} = 1.$$

——— ∞ ———

Problema 8.49. Halla $F'(x)$, sabiendo que $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen} t dt$.

Solución.

En este caso se tiene que aplicar la expresión de la regla de la cadena bajo el signo integral:

$$F'(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x),$$

luego

$$F'(x) = \operatorname{sen} x^2 2x - (\operatorname{sen} 0) \cdot 0 = 2x \operatorname{sen} x^2.$$

El resultado se puede comprobar, haciendo primero la integral y luego derivando el resultado obtenido

$$F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen} t dt = -\cos t]_0^{x^2}$$

$$= -\cos x^2 - \cos 0 = -\cos x^2 - 1.$$

Y derivando ahora la función $F(x) = -\cos x^2 - 1$ se tiene:

$$F'(x) = \operatorname{sen}\left(x^2\right) \cdot 2x.$$

——— ∞ ———

Problema 8.50. Halla la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Solución.

Se está ante una integral impropia de primera especie, por tanto se tiene que:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)\, dx.$$

Y aplicándolo a la integral, que es inmediata, se tiene:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{n\to\infty} [\arctan x]_1^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \arctan n - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Como el valor del límite es finito, se está ante una integral convergente:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

——— ∞ ———

Problema 8.51. Halla la integral:

$$\int_0^\infty x dx.$$

Solución.

Se está ante una integral impropia de primera especie, luego

$$\int_0^\infty x dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n x dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2} - 0 = \infty.$$

Y como el valor del límite no es finito, se está ante una integral divergente.

——— ∞ ———

Problema 8.52. Halla la integral:

$$\int_1^\infty \frac{2}{x(x+2)} dx.$$

Solución.

Se está ante una integral impropia de primera especie.

La integral indefinida se puede escribir como

$$\int \frac{2}{x(x+2)} dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x+2| + C = \ln\frac{|x|}{|x+2|} + C.$$

Y sutituyendo en la integral impropia se tiene:

$$\int_1^\infty \frac{2}{x(x+2)} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{2}{x(x+2)} dx = \lim_{n\to\infty} [\ln|x| - \ln|x+2|]_1^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\ln|n| - \ln|1| - \ln|n+2| + \ln|1+2|] = \ln 3.$$

Cómo el valor del límite es finito, se está ante una integral convergente:

$$\int_1^\infty \frac{2}{x(x+2)} dx = \ln 3.$$

——— ∞ ———

Problema 8.53. Halla la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Solución.

Se está ante una integral impropia de primera especie, luego se puede escribir:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

La integral es inmediata multiplicando y dividiendo por -2,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_1^n = \lim_{n\to\infty} -\frac{2}{e^{\sqrt{n}}} + \frac{2}{e^{\sqrt{1}}} = \frac{2}{e}.$$

Y como el valor del límite es finito, se está ante una integral convergente:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{e}.$$

——— ∞ ———

Problema 8.54. Halla la integral:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx.$$

Solución.

Se está ante una integral impropia de primera especie, por tanto se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{n\to-\infty} \int_n^b f(x)\, dx.$$

Y aplicándolo a la integral se tiene:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{n\to-\infty} \int_n^0 e^x dx = \lim_{n\to-\infty} \left[e^x\right]_n^0 = \lim_{n\to-\infty} e^0 - e^n = 1 - \frac{1}{e^{\infty}} = 1.$$

Como el valor del límite es finito, se está ante una integral convergente:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = 1.$$

——— ∞ ———

Problema 8.55. Halla la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx.$$

Solución.

Se está ante una integral impropia de primera especie y si la función es continua y acotada en el intervalo $(-\infty, \infty)$, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx,$$

para un número real c cualquiera. Se elige $c = 0$ y, por tanto, la integral es la suma de las dos integrales siguientes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx.$$

La primera integral vale 1, tal y como se puede ver en el problema 8.54:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = 1.$$

Se calcula la segunda integral, que es del tipo impropia de primera especie, luego

$$\int_{0}^{\infty} e^x dx = \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{n} e^x dx = \lim_{n\to\infty} [e^x]_0^n = \lim_{n\to\infty} e^n - e^0 = \infty.$$

Y como el valor del límite es infinito, se está ante una integral divergente.

Por tanto, y como uno de los dos sumandos es divergente, se tiene que la integral pedida es divergente.

——— ∞ ———

Problema 8.56. Calcula la integral $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ y su Valor Principal de Cauchy.

Solución.

En primer lugar, se calcula la integral, tomando como valor c el 0, $c = 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \int_{-\infty}^{0} xdx + \int_{0}^{\infty} xdx.$$

Cada uno de los sumandos obtenidos, $\int_{-\infty}^{0} xdx$ y $\int_{0}^{\infty} xdx$ divergen, véase el problema 8.51, y por tanto la integral diverge.

Se halla ahora el Valor Principal de Cauchy:

$$VPC\,(f) = \int_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{0} xdx + \int_{0}^{n} xdx\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-n}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[0 - \frac{(-n)^2}{2} + \frac{n^2}{2} - 0\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}\right] = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Luego en este caso existe el Valor Principal de Cauchy y es igual a 0, aunque la integral es divergente.

$$VPC\,(f) = \int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0.$$

——— ∞ ———

Problema 8.57. Halla las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ b) $\int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx.$

Solución.

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ es una función continua y acotada en $(0,1]$, con una discontinuidad infinita en $x = 0$, es decir,

$$\lim_{c\to 0^+} f(x) = \pm\infty.$$

Por tanto, la integral que se pide calcular es impropia de segunda especie y se puede aplicar que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 x^{-2/3}dx = \lim_{c\to 0^+}\left.\frac{x^{1/3}}{1/3}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+}\left(3\sqrt[3]{1} - 3\sqrt[3]{c}\right) = 3.$$

Como el valor del limite es finito, se está ante una integral convergente.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3.$$

b) $\int_0^3 \dfrac{1}{(x-2)^2}dx.$

Se está ante una integral impropia de segunda especie, pues existe una discontinuidad en $x = 2$, por tanto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx = \lim_{\delta\to 0}\int_0^{2-\delta}\frac{1}{(x-2)^2}dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{2+\delta}^3\frac{1}{(x-2)^2}dx$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[-\frac{1}{(x-2)}\right]_0^{2-\delta} + \lim_{\delta\to 0}\left[-\frac{1}{(x-2)}\right]_{2+\delta}^3$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{(2-\delta-2)} + \frac{1}{(0-2)}\right)$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{(3-2)} + \frac{1}{(2+\delta-2)}\right) = \infty.$$

Luego, la integral es divergente.

——— ∞ ———

Problema 8.58. Halla $\Gamma(2)$ y $\Gamma(3)$, a partir de la definición de la función y comprueba que valen 1 y 2 respectivamente.

Solución.

Se denomina Función Gamma o Integral de Euler de segunda especie, y se denota por Γ a la función:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx.$$

Aplicando la definición para el caso de $p = 2$ se tiene:

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty x^{2-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty xe^{-x}dx.$$

Integral que puede calcularse mediante el método de integración por partes,

$$u = x,\ dv = e^{-x}dx,\ du = dx,\ v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}.$$

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M xe^{-x}dx$$

$$= \lim_{M\to\infty} -xe^{-x}\Big]_0^M + \int_0^M e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty} -xe^{-x}\Big]_0^M + -e^{-x}\Big]_0^M = 1.$$

En el caso de $p = 3$, se tiene:

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty x^{3-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty x^2e^{-x}dx.$$

Integral que puede calcularse mediante el método de integración por partes,

$$u = x^2,\quad dv = e^{-x}dx$$

$$du = 2xdx,\quad v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$$

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty x^2e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M x^2e^{-x}dx$$

$$= \lim_{M\to\infty} -x^2e^{-x}\Big]_0^M + 2\int_0^M xe^{-x}dx = 0 + 2\Gamma(2) = 2.$$

——— ∞ ———

Problema 8.59. Haz el cambio $x^4 = t$ y halla la integral:

$$\int_0^\infty e^{-x^4} dx.$$

Solución.

Al hacer el cambio indicado se tiene:

$$t = x^4 \to x = t^{1/4}$$

$$dx = \frac{1}{4} t^{-3/4} dt.$$

Los extremos de integración se transforman en

$$x = 0 \to t = 0^{1/4} = 0$$

$$x = \infty \to t = \infty.$$

Y la integral a calcular será:

$$\int_0^\infty e^{-x^4} dx = \int e^{-t} \frac{1}{4} t^{-3/4} dt.$$

Aplicando la definición de función gamma se tiene $p - 1 = -\frac{3}{4} \to p = \frac{1}{4}$ y la integral queda:

$$\int_0^\infty e^{-x^4} dx = \int e^{-t} \frac{1}{4} t^{-3/4} dt = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

——— ∞ ———

Problema 8.60. Halla la integral:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-5x} dx$$

haciendo previamente el cambio $5x = t$.

Solución.

Al hacer el cambio indicado se tiene:

$$t = 5x \to x = \frac{1}{5} t$$

$$dx = \frac{1}{5}dt.$$

Los extremos de integración se transforman en

$$x = 0 \to t = 5 \cdot 0 = 0$$

$$x = \infty \to t = \infty.$$

Y la integral a calcular será:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-5x} dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{5}t\right)^3 \frac{1}{5} e^{-t} dt = \frac{1}{5^4} \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt.$$

Aplicando la definición de función gamma se tiene $p - 1 = 3 \to p = 4$ y la integral queda:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-5x} dx = \frac{1}{5^4} \int t^3 e^{-t} dt = \frac{1}{5^4} \Gamma(4) = \frac{3!}{5^4}.$$

——— ∞ ———

Problema 8.61. Halla la integral:

$$\int_{-\infty}^0 x^3 e^x dx$$

haciendo previamente el cambio $x = -t$.

Solución.

Al hacer el cambio indicado se tiene:

$$t = -x \to dx = -dt.$$

Los extremos de integración se transforman en

$$x = 0 \to t = 0$$

$$x = -\infty \to t = \infty.$$

Y la integral a calcular será:

$$\int_{-\infty}^0 x^3 e^x dx = \int_\infty^0 (-t)^3 e^{-t} dt = -\int_0^\infty t^3 e^{-t} dt = -\Gamma(4) = -3!$$

——— ∞ ———

Problema 8.62. Halla la integral:

$$\int_5^{\infty} x^2 e^{-(x-5)} dx$$

haciendo previamente el cambio $x - 5 = t$.

Solución.

Al hacer el cambio indicado se tiene:

$$t = x - 5 \to x = t + 5$$

$$dx = dt.$$

Los extremos de integración se transforman en

$$x = 5 \to t = 5 - 5 = 0,$$

$$x = \infty \to t = \infty.$$

Y la integral a calcular será:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-(x-5)} dx = \int_0^{\infty} (t+5)^2 e^{-t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt + \int_0^{\infty} 10te^{-t} dt + \int_0^{\infty} 25e^{-t} dt.$$

Aplicando la definición de función gamma se tiene:

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt + \int_0^{\infty} 10te^{-t} dt + \int_0^{\infty} 25e^{-t} dt = \Gamma(3) + 10\Gamma(2) + 25\Gamma(1).$$

——— ∞ ———

Problema 8.63. Halla la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4} e^{-1/x} dx$$

haciendo previamente el cambio $\frac{1}{x} = t$.

Solución.

Al hacer el cambio indicado se tiene:

$$t = \frac{1}{x} \to x = \frac{1}{t},$$

$$dx = -\frac{1}{t^2}dt.$$

Los extremos de integración se transforman en

$$x = 0 \to t = \infty,$$

$$x = \infty \to t = 0.$$

Y la integral a calcular será:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4} e^{-1/x} dx = \int_\infty^0 t^4 e^{-t} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = \Gamma(3).$$

——— ∞ ———

Problema 8.64. Halla $\beta(2,1)$ y $\beta(1,2)$.

Solución.

Se trata de una función Beta. En este caso $p = 2$ y $q = 1$, aplicando la definición:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

se tiene:

$$\beta(2,1) = \int_0^1 x^{2-1}(1-x)^{1-1} dx$$

$$= \int_0^1 x(1-x)^0 dx = \int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

En el caso de $p = 1$ y $q = 2$, aplicando la definición se tiene:

$$\beta(1,2) = \int_0^1 x^{1-1}(1-x)^{2-1} dx$$

$$= \int_0^1 x^0(1-x)^1 dx = \int_0^1 1 - x dx = x - \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

——— ∞ ———

Problema 8.65. Halla $\beta(5,4)$.

Solución.

Aplicando la definición se tiene:

$$\beta(5,4) = \int_0^1 x^{5-1}(1-x)^{4-1}dx = \beta(p,q) = \int_0^1 x^4(1-x)^3dx$$

cuyo cálculo puede ser tedioso ya que se ha de desarrollar un binomio de grado 3, multiplicarlo por x^4 y luego integrar cada sumando y sustituir los valores de los extremos. Sin embargo, si se aplica la relación entre las funciones Beta y Gamma se tiene:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

y aplicándolo al problema:

$$\beta\,(5,4) = \frac{\Gamma\,(5)\,\Gamma\,(4)}{\Gamma\,(5+4)} = \frac{\Gamma\,(5)\,\Gamma\,(4)}{\Gamma\,(9)} = \frac{4!\cdot 3!}{8!} = \frac{1}{280}.$$

——— ∞ ———

Problema 8.66. Halla las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}dx$ **b)** $\int_0^{\pi/2} \cos^7 t\,dt$ **c)** $\int_0^\infty \dfrac{dx}{(1+x)^2\sqrt{x}}$.

Solución.

a) $\int_0^1 x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}dx$

Se trata de una función Beta. Identificando los exponentes, se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} p-1 = \frac{-2}{3} \\ \\ q-1 = \frac{-1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow p = \frac{1}{3},\ q = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}dx = \beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\,(1)} = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Y aplicando la fórmula de los complementos,

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi},$$

se obtiene:

$$\int_0^1 x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}dx = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos^7 t\, dt$

Aplicando la expresión

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} t \cdot \cos^{2q-1} t\, dt,$$

se tiene

$$\left\{\begin{array}{l} 2p-1=0 \\ 2q-1=7 \end{array}\right. \Rightarrow p = \frac{1}{2},\ q = 4.$$

Por tanto, se puede hallar el valor de la integral a partir de la función Beta:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^7 t\, dt = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2},4\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+4\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}3!}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{3\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{48}{105} = \frac{16}{35}.$$

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2\sqrt{x}}$

La integral solicitada se puede reescribir como

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} \frac{x^{-1/2}}{(1+x)^2}dx.$$

Y aplicando la expresión

$$\beta(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx,$$

se tiene que los valores de p y q son:

$$\left\{\begin{array}{l} p-1=-\frac{1}{2} \\ \\ p+q=2 \end{array}\right. \Rightarrow p=\frac{1}{2},\ q=\frac{3}{2}.$$

Por tanto, se puede hallar el valor de la integral a partir de la función Beta y su relación con la función Gamma:

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2\sqrt{x}}=\int_0^\infty \frac{x^{-2/3}}{1+x}dx=\beta\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{1!}=\frac{\pi}{2}.$$

——— ∞ ———

Bibliografía

- Álvarez López, A. A. (2018). *Introducción al álgebra lineal.* Editorial Sanz y Torres.
- Apostol, T. (1988). *Calculus.* Editorial Reverté.
- Arya, J. C., Lardner, R. W. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.* Editorial Pearson.
- Borobia Vizmanos, A., Estrada López, B. (2015). *Matemáticas para ciencias ambientales: álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.* Editorial Sanz y Torres.
- Caballero Fernández, R., González Pareja, A. C., Calderón Montero, S., Rey Borrego, M. L., Galache Laza, T., Ruíz de la Rúa, F. (2000). *Matemáticas aplicadas a la economía y a la empresa: 434 ejercicios resueltos y comentados.* Ediciones Pirámide.
- Calvo, M. E., Escribano, M. C., Fernández, G. M., García, M. C., Ibar, R, Ordás, M. P. (2003). *Problemas resueltos de matemáticas aplicadas a la economía y la empresa.* Editorial AC.
- Cembranos Díaz, P., Mendoza Casas, J. (2004). *Límites y derivadas.* Editorial Anaya.
- Cembranos Díaz, P., Mendoza Casas, J. (2004). *Cálculo integral.* Editorial Anaya.
- Demidovich, B. P. (1980). *Problemas y ejercicios de análisis matemático.* Editorial Paraninfo.

- García Llamas, M. C., Palencia González, F. J. (2018). *Matemáticas para las Ciencias Sociales.* Ediciones Académicas, S.A.
- García Llamas, M. C., Palencia González, F. J. (2019). *Fundamentos matemáticos para las Ciencias Sociales.* Editorial McGraw-Hill.
- García Llamas, M. C., Rodríguez, J., Palencia González, F. J., Díez, F., (2013). *Matemáticas de las Ciencias Sociales. Exámenes resueltos PAU UNED.* Ediciones Académicas, S.A.
- Guzmán Ozamiz, M. de. (2004). *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas.* Editorial Anaya.
- Hoffmann, L. D., Bradley, G. L., Rosen K. H. (2006). *Cálculo Aplicado para Administración, Economía y Ciencias Sociales.* Editorial McGraw-Hill.
- Larson, R., Edwards, B. H. (2010). *Cálculo 1 de una variable.* Editorial McGraw-Hill.
- Palencia González, F. J., García Llamas, M. C. (2018). *Matemáticas para Economistas.* Ediciones Académicas, S.A.
- Palencia González, F. J., García Llamas, M. C. (2019). *Cálculo para Economistas.* Editorial McGraw-Hill.
- Piskunov, N. (2005). *Cálculo diferencial e integral.* Editorial Limusa
- Ramos Méndez, E., Hernández Morales, V., Vélez Ibarrola, R. (2016). *Introducción a las Matemáticas. Acceso a la Universidad.* Ediciones Académicas, S.A.
- Rodríguez Ruiz, J., Matilla García, M., García Llamas, M. C. (2013). *Matemáticas para los grados en Economía y Empresa. Cálculo Diferencial. Ejercicios y problemas resueltos.* Ediciones Académicas, S.A.
- Rodríguez Ruiz, J., Matilla García, M., García Llamas, M. C. (2013). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Ediciones Académicas, S.A.
- Rodríguez Ruiz, J., Matilla García, M., García Llamas, M. C., Palencia González, F. J. (2014). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Ejercicios y problemas resueltos.* Ediciones Académicas, S.A.
- Rodríguez Salazar, S. (2007). *Matemáticas para estudiantes de Química.* Editorial Síntesis.

- Spivak, M. (2012). *Calculus (3ª Ed.).* Editorial Reverté.
- Sydsaeter, K., Hammond, P. J., Carvajal, A. (2011). *Matemáticas para el análisis económico.* Editorial Pearson.
- Zill, D. (2015). *Cálculo de una variable.* Editorial McGraw-Hill.

Fundamentos Matemáticos para las Ciencias Sociales

EJERCICIOS RESUELTOS

María del Carmen García Llamas
Francisco Javier Palencia González

Este libro es una colección de ejercicios que tiene como objetivo recorrer los conceptos básicos utilizados tradicionalmente para el estudio de las ciencias sociales. El texto nace como complemento al libro de teoría de la asignatura Fundamentos Matemáticos de las Ciencias Sociales del Grado en Turismo. Sin embargo, por nuestra experiencia, podemos asegurar que será de utilidad a otros estudiantes que quieran realizar un repaso de los métodos en él contenidos, ya que los ejercicios se presentan completos y en orden progresivo de dificultad. Se puede usar además de forma independiente, pues la intención de los autores es que la obra contenga los métodos básicos de resolución de los ejercicios propuestos sin que sea necesario acudir a manuales adicionales.

El texto está dividido en dos bloques. El primero recorre conceptos fundamentales de cálculo matricial y su aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. El segundo se centra en el estudio, el análisis y la representación gráfica de funciones reales de variable real.

Se ha pensado especialmente en aquellos estudiantes que llevan tiempo sin abordar el estudio de las matemáticas y, por eso, se ha incluido un tema inicial de repaso de conceptos básicos. Asimismo, y para facilitar la comprensión de los métodos de desarrollo de los ejercicios, se ha incluido en cada tipo de ejercicios un primer caso con todos los pasos y las explicaciones necesarias para que el estudiante pueda entender la resolución y así avanzar posteriormente de forma autónoma.

UNED Editorial

ISBN:978-8448618278
9 788448 618278

www.mheducation.es