

Lección 10. El método de los elementos finitos V.

Elementos finitos para el problema de la Elasticidad

Elías Cueto y David González

Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Escuela de Ingeniería y Arquitectura
Universidad de Zaragoza



Universidad
Zaragoza

Mayo de 2022

1 Bibliografía

2 Motivación

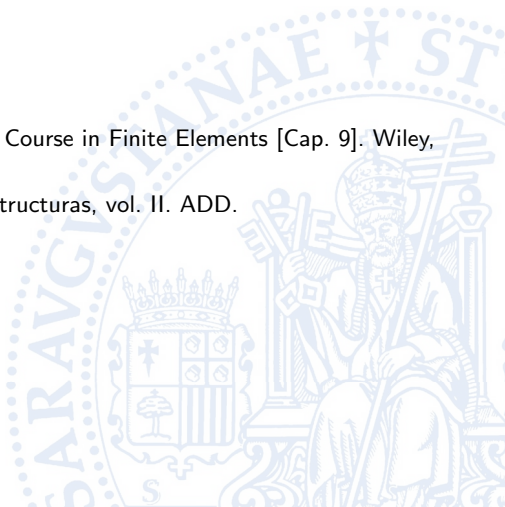
3 Introducción

4 EF en 2D



Bibliografía:

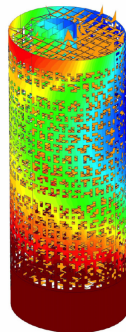
- J. Fish, T. Belytschko. A First Course in Finite Elements [Cap. 9]. Wiley, 2007.
- Doblaré y Gracia, Teoría de Estructuras, vol. II. ADD.



Donde los modelos no bastan...



Donde los modelos no bastan...



Formas fuerte y débil del problema de la Elasticidad

- Las ecuaciones de la Elasticidad, ya repasadas este curso, comprenden:

- Equilibrio:

$$\nabla \sigma + b = 0$$

- Ecuaciones cinemáticas:

$$\varepsilon = \nabla_s u$$

- Ecuaciones constitutivas:

$$\sigma = D\varepsilon$$

- Condiciones de contorno:

$$\sigma n = \bar{t} \text{ en } \Gamma_t, \quad u = \bar{u} \text{ en } \Gamma_u$$

Formas fuerte y débil del problema de la Elasticidad

- Para desarrollar la forma débil del problema se multiplica ambos miembros de la ec. de equilibrio por una función de ponderación

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$$

- y se aplica el teorema de la divergencia (integración por partes):

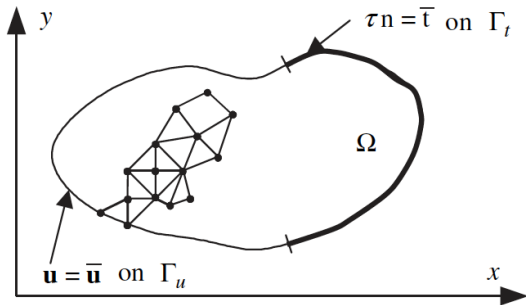
Encontrar $u \in U = \{u(\mathbf{x}) | u(\mathbf{x}) \in H^1, u = \bar{u} \text{ en } \Gamma_u\}$ tal que

$$\int_{\Omega} (\nabla_s \mathbf{w})^T \mathbf{D} \nabla_s \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \mathbf{b} d\Omega, \quad \forall \mathbf{w} \in H_0^1.$$

Discretización por elementos finitos

- Se considera ahora una división del dominio en n_{el} elementos finitos como en la figura.
- Existirán entonces dos grados de libertad por nodo:

$$\mathbf{d} = [u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ \cdots \ u_{xn_{np}} \ u_{yn_{np}}]$$



Discretización por elementos finitos

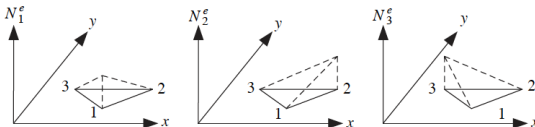
- Los desplazamientos se interpolan entonces a partir de los desplazamientos nodales:

$$\mathbf{u}(x, y) \approx \mathbf{u}^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{d}^e, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$\mathbf{w}^T(x, y) \approx \mathbf{w}^{eT} = \mathbf{w}^{eT} \mathbf{N}^e(x, y)^T$$

- con

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & \cdots & N n_{\text{en}}^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & \cdots & 0 & N n_{\text{en}}^e \end{bmatrix}$$



Triángulo de tres nodos

- Los elementos triangulares de tres nodos son muy simples. Pueden mallar prácticamente cualquier geometría (no así los cuadriláteros) y permiten el refinado en zonas con alto gradiente.
- Sin embargo, los resultados que proporcionan son generalmente bastante pobres.
- La solución se aproxima en ellos a partir de los valores nodales:

$$u_i^e(x, y) = \alpha_0^e + \alpha_1^e x + \alpha_2^e y = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0^e \\ \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \end{bmatrix} = \mathbf{p}(x, y) \boldsymbol{\alpha}^e$$

- Siguiendo el procedimiento ya visto en problemas 1D, se tiene:

$$N_1^e = \frac{1}{2A^e} (x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e + (y_2^e - y_3^e)x + (x_3^e - x_2^e)y),$$

$$N_2^e = \frac{1}{2A^e} (x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e + (y_3^e - y_1^e)x + (x_1^e - x_3^e)y),$$

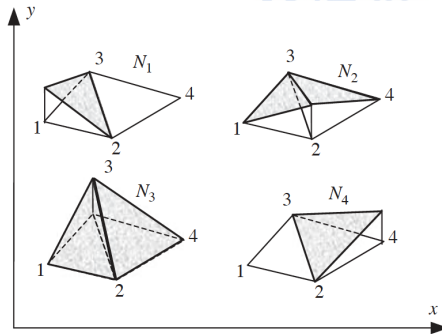
$$N_3^e = \frac{1}{2A^e} (x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e + (y_1^e - y_2^e)x + (x_2^e - x_1^e)y).$$

Triángulo de tres nodos

- Las derivadas (deformaciones) se calculan a partir de la matriz:

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} (y_2^e - y_3^e) & (y_3^e - y_1^e) & (y_1^e - y_2^e) \\ (x_3^e - x_2^e) & (x_1^e - x_3^e) & (x_2^e - x_1^e) \end{bmatrix}.$$

- Continuidad:



Cuadrilátero de cuatro nodos

- El elemento cuadrilátero se puede calcular a partir del método del *producto tensorial*.
- ¿Qué termino añadir a la aproximación? La solución la da el triángulo de Pascal:

		1		constant
	x		y	linear
x^2		xy	y^2	quadratic
x^3	x^2y	xy^2	y^3	cubic

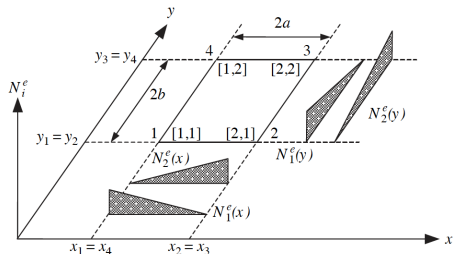
Cuadrilátero de cuatro nodos

- Para que el elemento resultante proporcione la misma aproximación en todas las direcciones del espacio escogemos el término xy :

$$u_i^e(x, y) = \alpha_0^e + \alpha_1^e x + \alpha_2^e y + \alpha_3^e xy$$

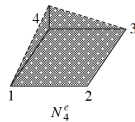
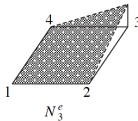
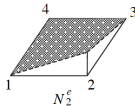
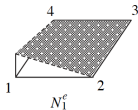
de forma que los cuatro valores, como es habitual, se calculen en función de los desplazamientos en los cuatro nodos del elemento.

- El producto tensorial de dos elementos 1D nos proporciona uno 2D:



Cuadrilátero de cuatro nodos

- De forma que se tiene:



$$N_1^e(x, y) = \frac{x - x_2^e}{x_1^e - x_2^e} \frac{y - y_4^e}{y_1^e - y_4^e} = \frac{1}{A^e} (x - x_2^e)(y - y_4^e),$$

$$N_2^e(x, y) = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \frac{y - y_4^e}{y_1^e - y_4^e} = -\frac{1}{A^e} (x - x_1^e)(y - y_4^e),$$

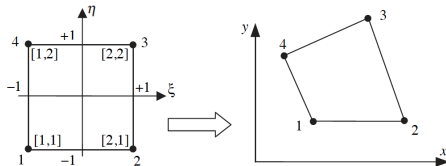
$$N_3^e(x, y) = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \frac{y - y_1^e}{y_4^e - y_1^e} = \frac{1}{A^e} (x - x_1^e)(y - y_1^e),$$

$$N_4^e(x, y) = \frac{x - x_2^e}{x_1^e - x_2^e} \frac{y - y_1^e}{y_4^e - y_1^e} = -\frac{1}{A^e} (x - x_2^e)(y - y_1^e),$$

Cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos

- En la práctica se trabaja en el elemento de referencia $[-1, 1] \times [-1, 1]$, de forma que la geometría se interpola igual que el resto de variables:

$$x(\xi, \eta) = N^{4Q}(\xi, \eta)x^e, \quad y(\xi, \eta) = N^{4Q}(\xi, \eta)y^e$$



Cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos

- El cálculo de derivadas exige el cálculo del jacobiano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_I^{4Q}}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_I^{4Q}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_I^{4Q}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I^{4Q}}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_I^{4Q}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_I^{4Q}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I^{4Q}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I^{4Q}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^e} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I^{4Q}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I^{4Q}}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Lección 10. El método de los elementos finitos V.

Elementos finitos para el problema de la Elasticidad

Elías Cueto y David González

Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Escuela de Ingeniería y Arquitectura
Universidad de Zaragoza



Universidad
Zaragoza

Mayo de 2022