Grado en Ingeniería Informática

FISICA Y ELECTRÓNICA

Parte II. Circuitos eléctricos

Parte II:

Circuitos eléctricos

Contenido

4 Circuitos eléctricos en corriente continua 7

4.1 Introducción 7

4.2 Magnitudes eléctricas 8

4.2.1 Corriente eléctrica 8

4.2.2 Tensión o diferencia de potencial 9

4.2.3 Corriente continua y alterna 11

4.2.4 Potencia eléctrica 11

4.2.5 Energía eléctrica 12

4.3 Leyes de Kirchhoff 12

4.3.1 1ª ley de Kirchhoff o Ley de conservación de la carga 12

4.3.2 2ª ley de Kirchhoff o Ley de conservación de la energía 13

4.4 Elementos pasivos 13

4.4.1 Resistencia 13

4.4.2 Condensador 25

4.4.3 Bobina 27

4.4.4 Resumen de elementos pasivos 31

4.5 Elementos activos 31

4.5.1 Fuente ideal de tensión 32

4.5.2 Fuente ideal de corriente 32

4.5.3 Asociación de fuentes ideales en serie 33

4.5.4 Asociación de fuentes ideales en paralelo 34

4.5.5 Fuentes dependientes 34

4.5.6 Fuente real de tensión 34

4.5.7 Fuente real de corriente 36

4.5.8 Equivalencia entre una fuente real de tensión y otra de intensidad 37

4.6 Métodos sistemáticos de resolución de circuitos 39

4.6.1 Método de mallas 39

4.6.2 Método de nudos 42

4.7 Formas de onda 46

4.7.1 Ondas periódicas 46

4.7.2 Ondas no periódicas 49

4.8 Comportamiento de los circuitos R-C serie frente a escalones de tensión 50

4.9 Equivalente Thevenin de un circuito 57

4 Circuitos eléctricos en corriente continua

4.1 Introducción

La energía eléctrica que utilizamos en nuestra vida diaria proviene en última instancia de las centrales eléctricas (generadores). Como en general las centrales están alejadas de los puntos de consumo de electricidad, la energía eléctrica se debe transportar mediante las líneas de transporte. Las líneas de transporte llevan la electricidad en forma de alta tensión, minimizando de esta forma las pérdidas de energía en los cables. Al llegar a las ciudades, la tensión se reduce en los transformadores, hasta llegar a nuestras viviendas, industrias etc. en forma de baja tensión, para poder ser utilizada en los distintos aparatos eléctricos.

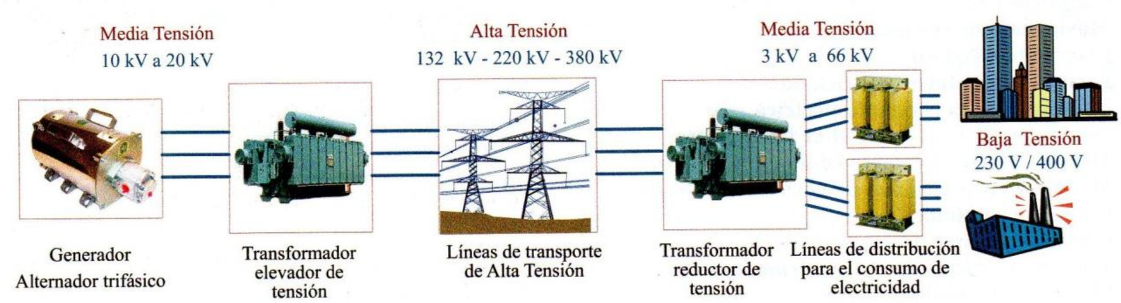


Figura 4. 1. Recorrido de la electricidad.

Desde la generación en las centrales hasta los puntos de consumo la electricidad está en forma de corriente alterna. Algunos receptores (por ejemplo, el motor de la lavadora) utilizan la corriente alterna directamente, mientras que otros (por ejemplo, cualquier aparato electrónico, como el ordenador) convierten la corriente alterna a continua, ya que la electrónica precisa de corriente continua para su funcionamiento.

En esta parte de la asignatura veremos los conceptos fundamentales de los circuitos eléctricos, obteniendo los conocimientos necesarios para analizarlos.

Un circuito eléctrico es un conjunto de elementos combinados de modo que se pueda producir una corriente eléctrica.

Los elementos del circuito pueden ser activos o pasivos. Los elementos activos (generadores o fuentes de tensión o de intensidad) suministran energía eléctrica al circuito. Los elementos pasivos (resistencias, bobinas, condensadores), por el contrario, consumen energía eléctrica o la almacenan temporalmente.

4.2 Magnitudes eléctricas

4.2.1 Corriente eléctrica

La corriente eléctrica es el movimiento de cargas eléctricas. Se define como la variación de carga eléctrica por unidad de tiempo en la sección transversal de un conductor.

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La unidad en el sistema internacional es el Amperio (A).

$$1A = \frac{1C}{1s}$$

Ya sabemos que las cargas pueden ser de signo positivo o negativo. Por ejemplo, un ión de Cloro (Cl^-) es una carga negativa, mientras que un ión de Sodio (Na^+) es una carga positiva.

El movimiento de cargas se debe a una diferencia de potencial entre dos puntos. Como se observa en la figura siguiente, si unimos a través de un conductor metálico dos cuerpos cargados con cargas de distinto signo, habrá un flujo de electrones desde el cuerpo cargado negativamente hacia el cuerpo cargado positivamente.

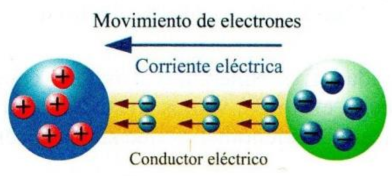


Figura 4. 2. Movimiento de los electrones.

En los circuitos eléctricos, normalmente formados por conductores metálicos, las cargas que se mueven son electrones (cargas negativas). Sin embargo, en el convenio de signos que se utiliza en circuitos eléctricos se considera que la corriente eléctrica es un movimiento de cargas positivas.

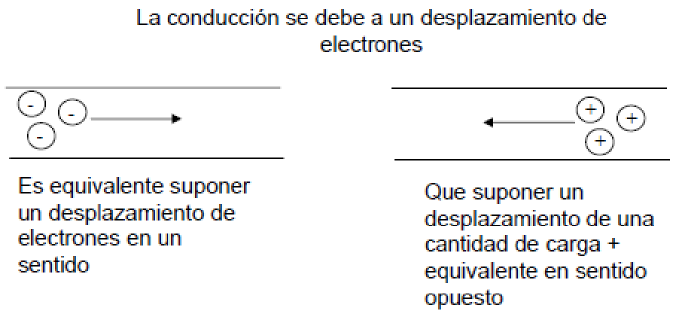


Figura 4. 3.Sentido de la corriente.

Dado un conductor por el que circula una corriente eléctrica, la forma de dar referencia de corriente a dicho conductor consiste en dibujar sobre él una flecha en sentido arbitrario. Si las cargas ideales positivas se desplazan en el sentido de la flecha, la corriente considerada será positiva. En caso contrario, se considerará la corriente negativa. Por ejemplo, en el conductor de la figura siguiente dibujamos una flecha del punto A al punto B. Si, tras calcular el circuito, obtenemos que la corriente es i = 5 A, querrá decir que la corriente circula del punto A al punto B, es decir, que las cargas ideales positivas circulan de A hacia B. Si, por el contrario, tras los cálculos hubiésemos determinado que i = -5 A, querría decir que en realidad las cargas ideales positivas circulan de B hacia A.

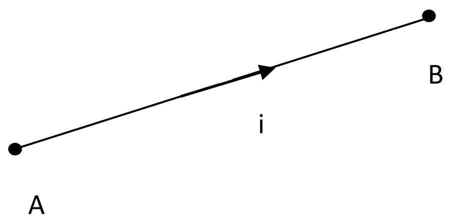


Figura 4. 4. Referencia de corriente.

La corriente se mide mediante el Amperímetro, cuyo símbolo es  . Se coloca de forma obligatoria en "serie" con el componente del cual se quiere saber la corriente que le atraviesa. Por ejemplo, en el circuito de la figura siguiente, formado por una pila conectada a una resistencia, la corriente por el circuito se medirá con el amperímetro.

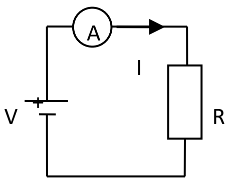


Figura 4. 5. Medida de intensidad.

4.2.2 Tensión o diferencia de potencial

El potencial eléctrico en un punto es el Trabajo requerido para mover una carga unitaria (trabajo por unidad de carga) desde ese punto hasta el infinito, donde el potencial es 0. Matemáticamente se expresa mediante:

$$V = \frac{dW}{dq}$$

La unidad en el sistema internacional es el Voltio (V).

$$1V = \frac{1J}{1C}$$

La tensión o diferencia de potencial entre dos puntos es el trabajo que se debe suministrar a una carga para moverla entre esos dos puntos. Dicho de otro modo, es la diferencia de potenciales eléctricos entre los dos puntos:

$$u_{AB} = V_A - V_B$$

La tensión entre dos puntos se denota con los subíndices de los puntos.

Así, la notación u_{AB} = 12 V significa que el potencial eléctrico del punto que está en primer lugar en la notación (A) es 12 V superior al potencial eléctrico del otro punto (B). Si, por el contrario, nos dijeran que u_{AB} = -12 V, significaría que el potencial del punto B es superior en 12 V al del punto A. En resumen:

- $u_{AB} > 0$ significa que *A* está a mayor potencial que *B*.
- $u_{AB} < 0$ significa que *A* está a menor potencial que *B*.

Si tenemos un punto *A* a mayor potencial que un punto *B* y los unimos mediante un conductor, las cargas positivas se mueven espontáneamente de *A* hacia *B*, perdiendo energía. Sin embargo, para ir de *B* hacia *A*, es necesario realizar un trabajo externo para moverlas.

En un símil gravitatorio, A sería el punto a más altura que el *B*. Para elevar una masa de *B* a *A* hace falta comunicarle energía externa (por ejemplo mediante nuestro brazo), ganando la masa energía potencial. Sin embargo, si soltamos la masa desde *A*, cae espontáneamente hasta *B*, perdiendo la energía potencial que tenía acumulada.

Para representar la tensión gráficamente en los circuitos se emplea una flecha que parte de un punto y apunta hacia el otro. En ese caso la tensión se refiere a la diferencia entre el potencial eléctrico del punto del que parte la flecha y el potencial del punto al que apunta. Una versión alternativa sería utilizar los signos + (para el punto de mayor potencial) y – (para el de menor potencial) en lugar de la flecha.

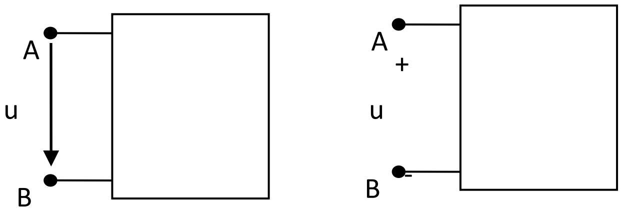


Figura 4. 6. Representación de la tensión.

Por ejemplo, si el valor de la tensión *u* de la figura anterior es *u* = 15 V, significará que el punto A tiene un potencial superior en 15 V al punto B (*VA*-*VB* = 15 V). Si, por el contrario, la tensión es *u* = -15 V, indicará que el potencial del punto B es superior en 15 V al del punto A.

La tensión se mide mediante el Voltímetro, cuyo símbolo es . Se coloca de forma obligatoria en "paralelo" con el componente del cual se quiere medir su tensión. Por ejemplo, en el circuito de la figura siguiente, formado por una pila conectada a una resistencia, el voltímetro mide la tensión que se está aplicando a la resistencia.

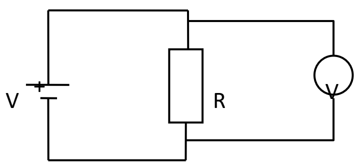


Figura 4. 7. Medida de tensión.

4.2.3 Corriente continua y alterna

Cuando se habla de corriente continua (DC), tanto la tensión como la corriente tienen un determinado valor que no cambia en el tiempo. Es decir, desde que se conecta un circuito de corriente continua, la tensión y la corriente son constantes por el circuito (sin tener en cuenta los transitorios, es decir, en régimen permanente). La corriente continua se utiliza en alimentación de aparatos electrónicos, en acumulación de energía eléctrica (baterías)…

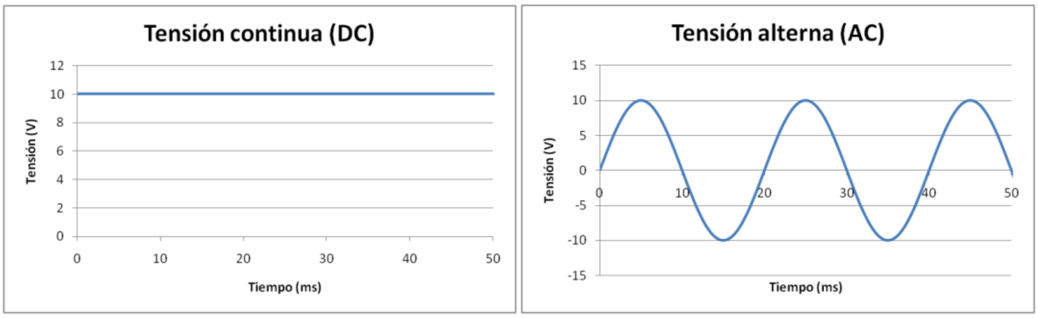


Figura 4. 8. Tensión continua y tensión alterna.

La corriente alterna (AC) implica que tanto la tensión como la corriente no son constantes, sino que su magnitud y su polaridad con el tiempo cambian en el tiempo de forma periódica. La corriente alterna utilizada en distribución de energía eléctrica es sinusoidal de 50 Hz de frecuencia (en Europa), por lo que en general, cuando nos referimos a corriente alterna, nos referimos al tipo sinusoidal de 50 Hz.

En electrónica se utilizan ondas de corriente alterna triangulares, cuadradas, rectangulares, de frecuencias muy diversas.

4.2.4 Potencia eléctrica

Sea el dipolo de la figura siguiente, y tal y como están definidas las referencias de tensión y de intensidad, se define la potencia absorbida como el producto:

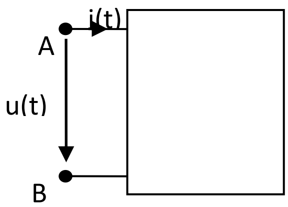


Figura 4. 9. Dipolo eléctrico.

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Medida en watio (W).

$$1\ W = 1\ V \cdot 1\ A$$

- Si $pabs(t) > 0$ el dipolo absorbe potencia (por ejemplo, una resistencia)
- Si $p_{abs}(t) < 0$ el dipolo cede potencia (generador).

Si, según las referencias de la figura anterior, en un instante dado *u(t)>0* significa que el terminal *A* está a mayor potencial que el *B*. Las cargas eléctricas positivas tienden a ir espontáneamente del terminal de mayor potencial hacia el de menos, perdiendo energía y por tanto cediéndosela al dipolo. Por tanto, si *i(t)>0*, significa que las cargas positivas irán de *A* a *B* por el interior del dipolo y este absorberá la potencia que le están cediendo las cargas en movimiento. En este caso el dipolo absorbe potencia.

Sin embargo, si en un momento dado *u(t)>0* y simultáneamente *i(t)<0*, las cargas positivas irían de *B* hacia *A* por el interior del dipolo. Como este proceso no se hace de forma espontánea, implica que el dipolo le está cediendo energía a las cargas en movimiento, que llegan a un terminal de mayor potencial y por tanto adquieren energía. En este caso el dipolo cede potencia.

4.2.5 Energía eléctrica

La energía eléctrica absorbida por un dipolo entre un tiempo t_o y otro t es:

$$W_{abs}(t) = \int_{t_0}^{t} p_{abs}(t)\,dt$$

Medida en Julio (J).

$$1\,J = 1\,W \cdot 1\,s$$

Otra unidad muy utilizada en electricidad es el kW·h (kilovatio hora).

$$1\,kW{\cdot}h = 3{,}6{\cdot}10^{6}\,J$$

4.3 Leyes de Kirchhoff

En un circuito eléctrico, existen ciertas relaciones entre las tensiones del circuito, y también entre las intensidades que circulan por él. Las leyes de Kirchhoff definen estas relaciones, a partir de las cuales se calculan los circuitos.

Definiciones topológicas:

- Nudo: Punto de confluencia de varias ramas (donde se encuentran más de dos conductores)
- Rama: elemento o conjunto de elementos conectado entre 2 nudos
- Malla: Conjunto de ramas que forman un camino cerrado y que no contienen ninguna otra línea cerrada en su interior.

4.3.1 1ª ley de Kirchhoff o Ley de conservación de la carga

La suma algebraica de las corrientes entrantes a un nudo es nula en todo instante

$$\Sigma\, i(t) = 0$$

A modo de ejemplo se muestra la Figura 4. 10, en el nudo la suma de las corrientes entrantes es cero.

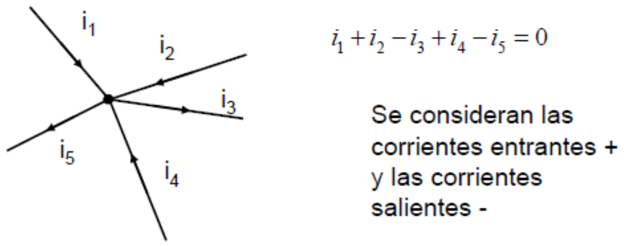


Figura 4. 10. Primera ley de Kirchhoff.

4.3.2 2ª ley de Kirchhoff o Ley de conservación de la energía

La suma algebraica de las tensiones a lo largo de cualquier línea cerrada en un circuito es nula en todo instante.

$$\Sigma\, u(t) = 0$$

La Figura 4. 11 muestra una malla, en ella, la suma de las tensiones es cero, tal y como se muestra en la ecuación.

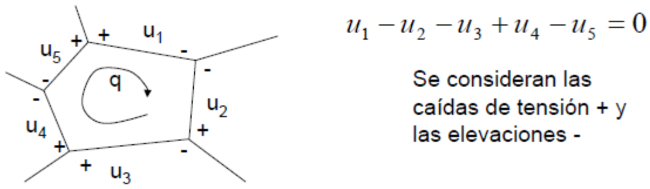


Figura 4. 11. Segunda ley de Kirchhoff.

4.4 Elementos pasivos

Los elementos pasivos consumen o almacenan energía eléctrica. Hay tres tipos de elementos pasivos:

- Resistencias: Disipan energía en forma de calor
- Bobinas: Almacenan y liberan energía en forma de campo magnético
- Condensadores: Almacenan y liberan energía en forma de campo eléctrico

En general consideraremos los elementos pasivos como elementos ideales, aunque en la realidad un condensador se comporta como si tuviese una pequeña resistencia en serie y una resistencia elevada en paralelo y una bobina real tiene también cierta resistencia.

En general supondremos los elementos pasivos conectados a través de conductores y conectores ideales.

4.4.1 Resistencia

Las resistencias son los elementos del circuito en los que se disipa potencia en forma de calor. En una resistencia se cumple siempre que la caída de tensión entre sus terminales es proporcional a la corriente que la atraviesa. Esta característica es la denominada Ley de Ohm.

La resistencia se denota con la letra R y se mide en Ohmio (Ω).

En los esquemas de circuitos utilizaremos los dos símbolos que se muestran a continuación, indistintamente.

Figura 4. 12. Representación gráfica de la resistencia.

La ley de Ohm matemáticamente se expresa como sigue:

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

en la que la tensión está dada en voltios (V), la intensidad en amperios (A) y la resistencia en ohmios (Ω).

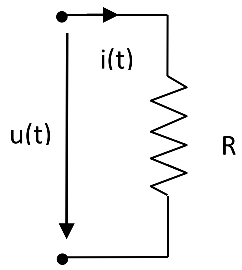


Figura 4. 13. Tensión y corriente en una resistencia.

El potencial en el borne de la resistencia por donde entra la corriente es superior al potencial del borne de salida. Por tanto, en el dibujo anterior, si $i(t)>0$ entonces $u(t)>0$.

Una forma alternativa de expresar la ley de Ohm es utilizando la conductancia G, cuya unidad es el Siemens (S), siendo 1 S = 1/Ω. La conductancia es la inversa de la resistencia:

$$\mathrm{G} = \frac{1}{\mathrm{R}}$$

Por lo que la ley de Ohm queda:

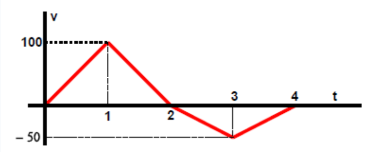
$$i(t) = G \cdot u(t)$$

Casos particulares:

- Si R = 0 (o, de otra forma, G = ∞), se denomina cortocircuito. En este caso, para una tensión dada, la intensidad se hace muy elevada (tiende a ∞), existiendo riesgo de destrucción del circuito.
- Si R = ∞ (o, de otra forma, G = 0), se denomina circuito abierto. En este caso, para una tensión dada, la intensidad es 0 A.

Ejemplo 4.1.

Sea una resistencia de 10 Ω, cuya tensión en bornes viene dada por:

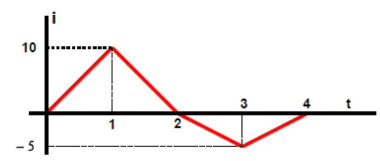


$$v = \begin{cases} 100\,t & 0 \le t \le 1 \\ -100t + 200 & 1 \le t \le 2 \\ -50t + 100 & 2 \le t \le 3 \\ 50t - 200 & 3 \le t \le 4 \end{cases} \quad \text{voltios}$$

Calcular la intensidad que atraviesa la resistencia, para los distintos intervalos de tiempo.

Solución:

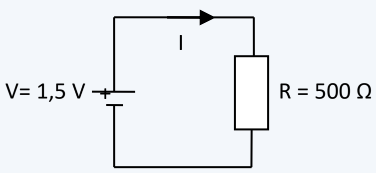
La intensidad, según la ley de Ohm, es, en todo momento, proporcional a la tensión e inversamente proporcional a la resistencia. La gráfica de intensidad tendrá la misma forma que la de tensión, solo que sus valores serán divididos por 10 Ω:



$$i = \begin{cases} 10t & 0 \le t \le 1 \\ -10t+20 & 1 \le t \le 2 \\ -5+10 & 2 \le t \le 3 \\ 5t-20 & 3 \le t \le 4 \end{cases} \quad \text{Amperios}$$

Ejemplo 4.2.

Se aplica la tensión de una pila de 1,5 V a una resistencia de 500 Ω. Calcular la intensidad del circuito.



La tensión aplicada es continua, es decir, los 1,5 V son invariables en el tiempo. La intensidad, según la ley de Ohm, será:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{1{,}5}{500} = 0{,}003\ A = 3\ mA$$

También será invariable con el tiempo, es decir, será una intensidad continua de 3 mA.

Nota: para corriente continua, en lugar de utilizar i(t) y u(t), usaremos los términos en mayúsculas, I para la intensidad y U o V para la tensión, ya que no varían con el tiempo.

La resistencia que opone un material al paso de corriente depende de su resistividad y de su geometría. Para elementos de sección uniforme, la resistencia que oponen al paso de la corriente viene determinada por la longitud (*l*) y la sección (S):

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

Donde ρ (Ω·mm^2/m) es la resistividad del material, *l* (m) es la longitud y *S* (mm^2) es la sección.

Los buenos conductores, como el cobre o el aluminio (materiales de los que están fabricados casi todos los cables eléctricos) tienen baja resistividad, mientras que los aislantes tienen elevada resistividad. Por ejemplo, el cobre tiene una resistividad de 0,017 Ω·mm^2/m a 20º de temperatura. La del aluminio es mayor, 0,028 Ω·mm^2/m, por lo que el aluminio es peor conductor que el cobre.

La resistividad depende de la temperatura, según:

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot [1 + \alpha \cdot (T_2 - T_1)]$$

Donde α es el coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura, *T1* es la temperatura a la que se da la resistividad $\rho 1$ y *T2* es la temperatura a la que se da la resistividad $\rho 2$.

Potencia y energía

Toda resistencia absorbe potencia, que disipa en forma de calor (efecto Joule). A partir de la fórmula de la potencia eléctrica y la ley de Ohm, tenemos:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i(t) \cdot i(t) = R \cdot\ i^2(t)$$

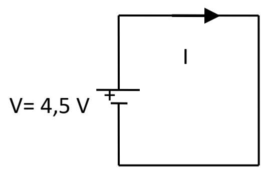
$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) = u(t) \cdot \frac{u(t)}{R} = \frac{u^2(t)}{R}$$

La potencia absorbida es siempre mayor que cero, transformándose en calor:

$$W_{abs}(t) = \int_{t_0}^{t} p_{abs}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} R \cdot i^2(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} \frac{u^2(t)}{R} dt$$

Ejemplo 4.3.

En los bornes de una pila de 4,5 V con resistencia interna de 0,01 Ω se conecta un cable de cobre de sección 1,5 mm2 y longitud 5 cm. Calcular la intensidad que habrá por el circuito.



¡Atención! Se ha conectado un cable a una fuente de tensión: Esto es un cortocircuito

La resistencia del cable será muy baja, pero no nula:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \frac{0{,}017\Omega mm^2}{m} \cdot \frac{0{,}05m}{1{,}5mm^2} = 5{,}6 \cdot 10^{-4}\Omega$$

La resistencia total del circuito es suma de la resistencia interna de la pila más la del cable:

$R = R_{pila} + R_{cable} = 0{,}01 + 5{,}6 \cdot 10\text{-}4 = 0{,}01056\ \Omega$.

La intensidad que circula por el circuito será:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{4{,}5}{0{,}01056} = 426\ A$$

Esta intensidad es muy elevada, propia de un cortocircuito. La pila se destruirá por calentamiento (Efecto Joule: $P = R_{pila} \cdot I^2 = 0{,}01 \cdot 4262 = 1814$ W). El cable también quedará inservible, disipando una potencia por efecto Joule de $P = R_{cable} \cdot I^2 = 0{,}00056 \cdot 4262 = 101{,}6$ W, deteriorándose el aislante e incluso, si el cortocircuito dura cierto tiempo, se puede llegar a quemar, con el riesgo de provocar un incendio en el edificio. Además, la persona que coloca el cable puede sufrir quemaduras.

Los cortocircuitos implican corrientes elevadísimas y la destrucción de los circuitos, además de posibles daños como quemaduras a las personas e incendios. Los cortocircuitos deben evitarse siempre. Para proteger los circuitos de las consecuencias de cortocircuitos accidentales se colocan fusibles o interruptores automáticos, que funden o abren el circuito antes de que este se deteriore.

Asociación de resistencias

En los circuitos, las resistencias y el resto de elementos que los componen pueden asociarse en serie o en paralelo.

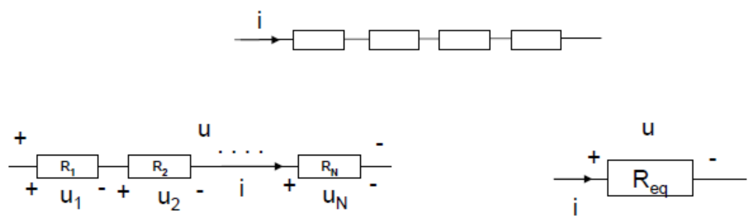
Para el análisis de circuitos eléctricos es especialmente útil el uso de equivalentes, en este caso de resistencias equivalentes. El valor de esta resistencia equivalente debe ser tal que la intensidad que circula por ella y la tensión en sus bornes sea igual a la del conjunto de resistencias que representa.

A continuación se describen estos dos tipos de asociación para el caso de las resistencias y el cálculo de la resistencia equivalente en cada caso.

Resistencias en serie:

Se dice que dos elementos están en serie si por los dos circula la misma intensidad, estando uno a continuación del otro.

La resistencia equivalente de varias resistencias conectadas en serie es la suma de estas.



$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = iR_1 + iR_2 + \ldots + iR_n = i(R_1 + R_2 + \ldots + R_n) = iR_{eq}$$

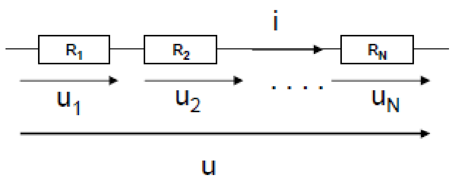
$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n}$$

Figura 4. 14. Asociación de resistencias en serie.

Como puede observarse la corriente que circularía por esa resistencia equivalente es igual a la que circula por el conjunto de resistencias, y la tensión en sus bornes es igual a la tensión que hay entre la última y la primera resistencia, es decir, a la tensión que cae en el conjunto de las resistencias.

Divisor de tensión:

En un conjunto de resistencias en serie, la tensión que cae en cada resistencia es una porción de la tensión total, y puede calcularse de la siguiente forma:

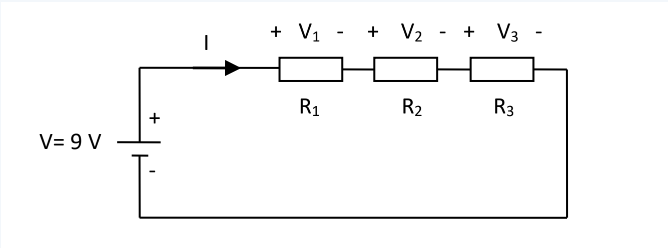


$$u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N} = \frac{R_k}{R_{eq}} u$$

Figura 4. 15. Divisor de tensión.

Ejemplo 4.4.

Se conecta una pila de 9 V a tres resistencias en serie de 100, 200 y 600 Ω. Calcular la intensidad por el circuito y la caída de tensión en cada resistencia. Comprobar que se cumple la 2ª ley de Kirchhoff. Calcular la potencia que suministra la fuente de tensión y la potencia que disipa cada resistencia.



La resistencia total del circuito es la suma:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 900\ \Omega$$

La intensidad por el circuito será:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{9}{900} = 0{,}01\ A = 10\ mA$$

La caída de tensión en cada resistencia será:

$$V_1 = I \cdot R_1 = 0{,}01 \cdot 100 = 1\ V$$

$$V_2 = I \cdot R_2 = 0{,}01 \cdot 200 = 2\ V$$

$$V_3 = I \cdot R_3 = 0{,}01 \cdot 600 = 6\ V$$

Otra forma de calcular las caídas de tensión es mediante el divisor de tensión:

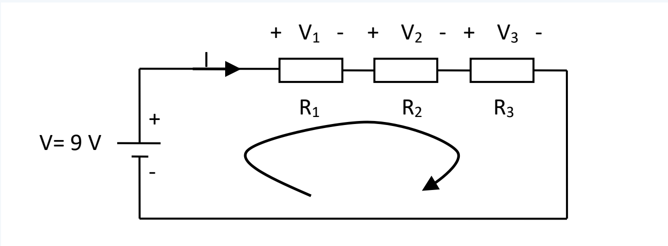
$$V_1 = \frac{R_1}{R_{eq}} \cdot V = \frac{100}{900} \cdot 9 = 1\ V$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_{eq}} \cdot V = \frac{200}{900} \cdot 9 = 2\ V$$

$$V_3 = \frac{R_3}{R_{eq}} \cdot V = \frac{600}{900} \cdot 9 = 6\ V$$

Comprobación de la 2ª ley de Kirchhoff:

Recorremos la malla en el sentido pila – R_1 – R_2 – R_3, teniendo en cuenta que las caídas de tensión las consideraremos positivas y las elevaciones negativas:



Σ u(t) = 0

$$-V + V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

$$-9 + 1 + 2 + 6 = 0$$

La tensión en el generador (pila) es igual a la suma de caídas de tensión en los receptores (resistencias).

Potencias:

La definición que se dio de potencia absorbida en un dipolo era:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Considerándose positiva la intensidad si entraba por el terminal de mayor potencial del dipolo. Consideraremos cada elemento del circuito como un dipolo:

Potencia que absorbe la fuente de tensión: $P = V\cdot(-I) = 9 \cdot (-0{,}01) = -0{,}09\ W = -90\ mW$

Se ha incluido el signo – delante de I puesto que estamos calculando la potencia absorbida por la pila, pero la corriente I del circuito entra por el terminal de menor potencial y sale por el de mayor potencial.

Es decir, la fuente de tensión no absorbe, sino que suministra una potencia de 0,09 W al circuito.

Potencia que absorbe la resistencia 1: $P_1 = V_1\cdot I = 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}01\ W = 10\ mW$

Potencia que absorbe la resistencia 2: $P_2 = V_2\cdot I = 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02\ W = 20\ mW$

Potencia que absorbe la resistencia 3: $P_3 = V_3\cdot I = 6 \cdot 0{,}01 = 0{,}06\ W = 60\ mW$

Comprobación: La potencia que suministra la fuente de tensión es igual a la que consumen las resistencias del circuito.

Resistencias en paralelo:

Se dice que dos elementos están en paralelo si están sometidos a la misma tensión.

La conductancia equivalente de varias resistencias en paralelo es igual a la suma de las conductancias de estas.

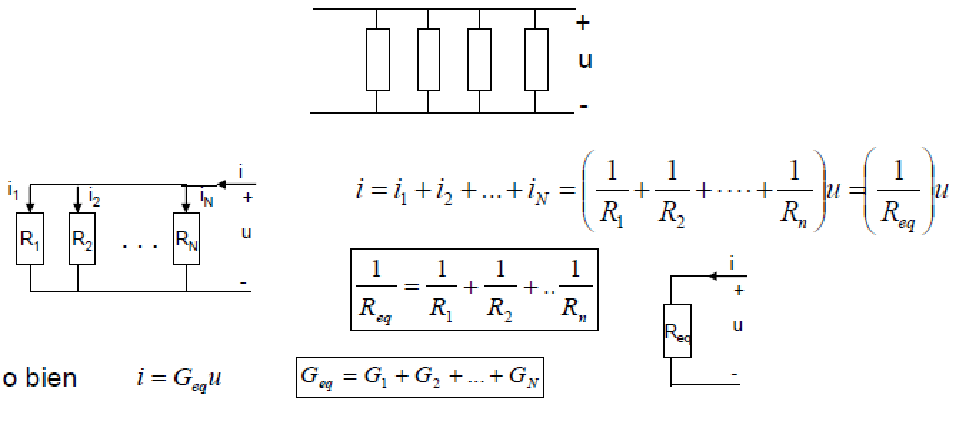


Figura 4. 16. Resistencias en paralelo.

Para calcular la resistencia equivalente basta con obtener el inverso de la conductancia equivalente.

A partir de lo mostrado en la figura anterior podemos particularizar para algunos casos:

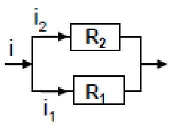
- La resistencia equivalente a dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo es el producto partido suma: $R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$
- 2 resistencias iguales en paralelo: la resistencia equivalente es la mitad de una de ellas.
- N resistencias iguales en paralelo: la resistencia equivalente es la de una de ellas dividida por N.
- Una resistencia muy grande en paralelo con una muy pequeña: la resistencia equivalente es un poco más pequeña que la más pequeña de las dos.

Divisor de intensidad:

En un conjunto de resistencias en paralelo, la corriente que atraviesa cada resistencia es una porción de la corriente total:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= uG_1 \\ u &= \frac{i}{G_1 + G_2 + \dots + G_n} \end{aligned}\right\} \quad i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + \dots + G_n} i \qquad \boxed{i_k = \frac{\frac{1}{R_k}}{\frac{1}{R_{eq}}} i = \frac{G_k}{G_{eq}} i}$$

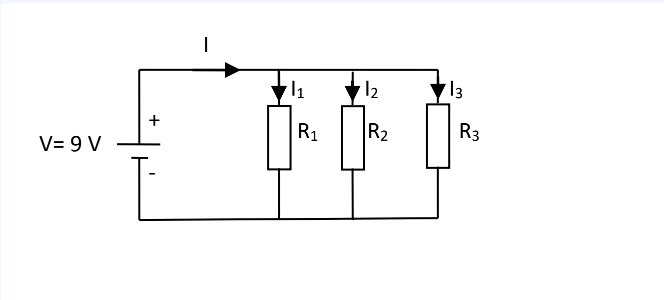
Caso particular de 2 resistencias en paralelo:



$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \qquad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Ejemplo 4.5.

Se conecta una pila de 9 V a tres resistencias en paralelo de 300, 600 y 1800 Ω. Calcular la intensidad por el circuito y la intensidad por cada rama. Comprobar que se cumple la 1ª ley de Kirchhoff. Calcular la potencia que suministra la fuente de tensión y la que consume cada resistencia.



La conductancia total del circuito es:

$$G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{300} + \frac{1}{600} + \frac{1}{1800} = 0{,}00555\ S$$

La resistencia total del circuito es:

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{0{,}00555\ S} = 180\ \Omega$$

La intensidad total que suministra la pila es:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{9}{180} = 0{,}05\ A = 50\ mA$$

La intensidad por las distintas resistencias será:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{9}{300} = 0{,}03\ A = 30\ mA$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{9}{600} = 0{,}015\ A = 15\ mA$$

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{9}{1800} = 0{,}005\ A = 5\ mA$$

Otra forma de calcular las intensidades es mediante el divisor de intensidad:

$$I_1 = \frac{G_1}{G_{eq}} \cdot I = \frac{\frac{1}{300}}{0{,}00555} \cdot 0{,}05 = 0{,}03\ A = 30\ mA$$

$$I_2 = \frac{G_2}{G_{eq}} \cdot I = \frac{\frac{1}{600}}{0{,}00555} \cdot 0{,}05 = 0{,}015\ A = 15\ mA$$

$$I_3 = \frac{G_3}{G_{eq}} \cdot I = \frac{\frac{1}{1800}}{0{,}00555} \cdot 0{,}05 = 0{,}005\ A = 5\ mA$$

Comprobación de la 1ª ley de Kirchhoff: La aplicamos al nudo de arriba.

Consideraremos positivas las corrientes entrantes al nudo y negativas las salientes.

Σ i(t) = 0

$$I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$En\ Amperios: 0{,}05 - 0{,}03 - 0{,}015 - 0{,}005 = 0$$

$$En\ miliAmperios: 50 - 30 - 15 - 5 = 0$$

La corriente que suministra en el generador (pila) es igual a la suma de las corrientes por las distintas ramas de receptores (resistencias).

Potencias:

- Potencia que suministra la fuente de tensión: P = V·I = 9 · 0,05 = 0,45 W = 450 mW

- Potencia que absorbe la resistencia 1: $P_1 = V \cdot I_1 = 9 \cdot 0{,}03 = 0{,}27\ W = 270\ mW$

- Potencia que absorbe la resistencia 2: $P_2 = V \cdot I_2 = 9 \cdot 0{,}015 = 0{,}135\ W = 135\ mW$

- Potencia que absorbe la resistencia 3: $P_3 = V \cdot I_3 = 9 \cdot 0{,}005 = 0{,}045$ W = 45 mW

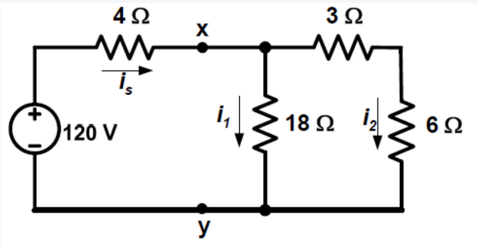
Comprobación: La potencia que suministra la fuente de tensión es igual a la que consumen las resistencias del circuito.

Resolución de circuitos con una sola fuente y resistencias en serie y paralelo

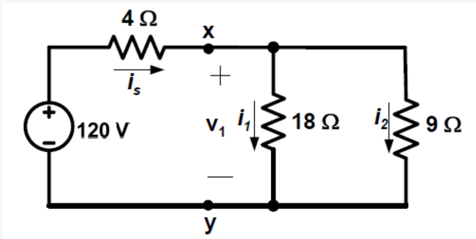
Para resolver circuitos más complejos, el procedimiento es el siguiente: se va reduciendo el circuito hasta quedarnos con una única resistencia equivalente para obtener los valores de tensión e intensidad para esa resistencia equivalente. A continuación se va volviendo hacia atrás en los equivalentes hasta calcular todas las tensiones e intensidades del circuito. Vamos a verlo con un ejemplo:

Ejemplo 4.6.

Se conecta una fuente de tensión continua de 120 V a cuatro conectadas según el esquema siguiente. Calcular la intensidad que suministra la fuente (I_s), las intensidades por las dos ramas (I_1 e I_2), la caída de tensión en cada resistencia, la potencia cedida por la fuente de tensión y la potencia absorbida por cada resistencia.

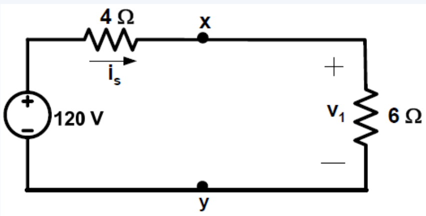


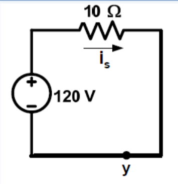
Las resistencias de 3 y 6 Ω están en serie, siendo el equivalente de 9 Ω.



Las resistencias de 18 y 9 Ω están en paralelo, siendo el equivalente:

$$R_{18||9} = \frac{18 \cdot 9}{18 + 9} = 6\ \Omega$$





La intensidad que suministra la fuente es:

$$I_s = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{120}{10} = 12\ A$$

En el circuito equivalente 2 calculamos la tensión V_1:

$$V_1 = I_s \cdot 6\Omega = 12 \cdot 6 = 72\ V$$

En el circuito equivalente 1 se calcula la intensidad por las ramas:

$$I_1 = \frac{V_1}{18} = \frac{72}{18} = 4\ A$$

$$I_2 = \frac{V_1}{9} = \frac{72}{9} = 8\ A$$

Se comprueba que $Is = I_1 + I_2$

Caída de tensión en las distintas resistencias:

- Caída de tensión en la resistencia de 18 Ω: $V_{18\Omega} = V_1 = 72$ V.

- Caída de tensión en la resistencia de 3 Ω: Ley de Ohm: $V_{3\Omega} = I_2 \cdot 3\Omega = 8 \cdot 3 = 24$ V.

- Caída de tensión en la resistencia de 6 Ω: Ley de Ohm: $V_{6\Omega} = I_2 \cdot 6\Omega = 8 \cdot 6 = 48$ V.

(Se comprueba que la caída de tensión en la resistencia de 3 Ω más la caída de tensión en la resistencia de 6 Ω suman la tensión V_1, es decir, $V_{3\Omega} + V_{6\Omega} = V_1 = 72$ V).

- Caída de tensión en la resistencia de 4 Ω: Ley de Ohm: $V_{4\Omega} = I_s \cdot 4\Omega = 12 \cdot 4 = 48$ V.

(Se comprueba que la caída de tensión en las resistencias del circuito equivalente 2 es igual a la tensión que suministra la fuente, es decir, $V_{4\Omega} + V_1 = 120$ V).

Potencias:

- Potencia que suministra la fuente de tensión: $P = V \cdot I_s = 120 \cdot 12 = 1440$ W

- Potencia que absorbe la resistencia de 4 Ω: $P_{4\Omega} = V_{4\Omega} \cdot I_s = 48 \cdot 12 = 576$ W

- Potencia que absorbe la resistencia de 18 Ω: $P_{18\Omega} = V_{18\Omega} \cdot I_1 = 72 \cdot 4 = 288$ W

- Potencia que absorbe la resistencia de 3 Ω: $P_{3\Omega} = V_{3\Omega} \cdot I_2 = 24 \cdot 8 = 192$ W

- Potencia que absorbe la resistencia de 6 Ω: $P_{6\Omega} = V_{6\Omega} \cdot I_2 = 48 \cdot 8 = 384$ W

(Se comprueba que la potencia que suministra la fuente es igual a la suma de las potencias que consumen las resistencias).

4.4.2 Condensador

Un condensador es un elemento pasivo capaz de almacenar energía eléctrica en forma de campo eléctrico. Está formado por dos placas metálicas separadas una distancia *d* y con un dieléctrico (aislante) entre ellas que impide el paso de la corriente. Al aplicar una diferencia de potencial entre ambas placas se depositan cargas eléctricas de signos contrarios en cada una de ellas, apareciendo un campo eléctrico en el medio aislante.

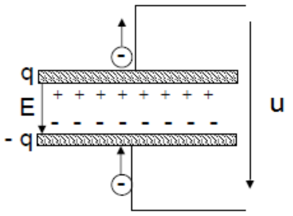


Figura 4. 17. Condensador.

La cantidad de carga eléctrica que se deposita en cada placa es proporcional a la tensión aplicada *u (V)* y a la capacidad *C*, característica del condensador que se mide en Faradios (F).

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

La capacidad de un condensador depende de su geometría, fundamentalmente del tamaño de las placas y de la separación entre ellas, además del tipo de aislante que está entre ellas.

Derivando ambos términos de la ecuación anterior respecto del tiempo, y considerando que la capacidad del condensador no varía con el tiempo, queda:

$$\frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

Dado que el término de la izquierda es la definición de corriente, llegamos a:

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

De la ecuación anterior se deduce que si *u(t)* es un valor constante (corriente continua), la intensidad es 0, por lo que un condensador se comporta como un circuito abierto en corriente continua (no deja pasar la corriente en el régimen permanente).

También se deduce que la tensión en un condensador no puede variar bruscamente (du/dt = ∞), pues eso implicaría una corriente infinita, lo cual no es posible. Los condensadores se oponen a los cambios bruscos de tensión, respondiendo con corrientes elevadas.

A partir de la ecuación anterior, integrando:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{du(t)}{dt} dt = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(t) dt$$

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(t) dt$$

El símbolo del condensador son dos líneas paralelas. En algunos tipos de condensadores se indica en el símbolo el signo + en una de sus placas, eso es debido a que esa placa debe estar siempre a más potencial que la otra, de lo contrario puede destruirse.

Potencia y energía:

La potencia absorbida en un instante dado por un condensador es:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) = u(t) \cdot C\frac{du(t)}{dt}$$

En un instante dado t, la potencia absorbida puede ser > 0 (absorbida) o bien < 0 (cedida).

La energía almacenada entre un tiempo t_0 y t es:

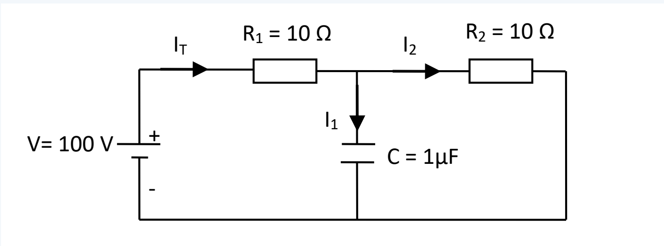
$$W_{abs}(t) = \int_{t_0}^{t} p_{abs}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} u(t) \cdot C\frac{du(t)}{dt}dt = C\int_{t_0}^{t} u(t)du(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2(t)$$

(si se supone que $u(t_0)=0$)

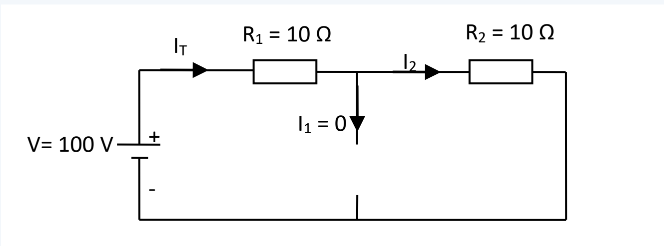
La energía almacenada es siempre mayor o igual que cero. Si el condensador cede potencia lo hace a expensas de la energía previamente almacenada, por tanto, es un elemento pasivo

Ejemplo 4.7.

En el siguiente circuito, calcular las intensidades por el circuito y la tensión en los distintos componentes en el régimen permanente. Determinar también la energía que almacena el condensador en régimen permanente.



En corriente continua, el condensador se comporta como circuito abierto en el régimen permanente, por lo que $I_1 = 0$:



El circuito queda con las dos resistencias en serie, siendo la resistencia equivalente de 20 Ω, la corriente por el circuito $I_T = I_2 = V/R_{eq} = 100 / 20 = 5$ A.

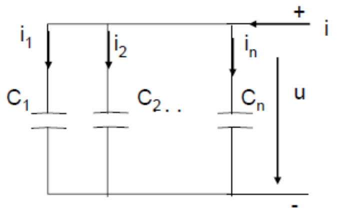
La tensión en cada resistencia es la mitad de la total (50 V), pues son dos resistencias iguales en serie.

La tensión en el condensador es 50 V, ya que está en paralelo con la resistencia R_2.

La energía almacenada por el condensador será:

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot {V_c}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 50^2 = 0.00125\, J$$

Asociación de condensadores en paralelo y en serie



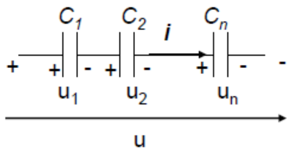
$$i = i_1 + i_2 + ... + i_n$$

$$i_k = C_k \frac{du}{dt}$$

$$i = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} + ... + C_n \frac{du}{dt} = (C_1 + C_2 + ... + C_n)\frac{du}{dt} = C_{eq} \frac{du}{dt}$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + ... + C_n}$$

Figura 4. 18. Asociación de condensadores en paralelo,



$$u = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{1}{C_k} i$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + ... + \frac{du_n}{dt} = \frac{1}{C_1} i + \frac{1}{C_2} i + ... + \frac{1}{C_n} i =$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n} \right) i = (1/C_{eq}) i \quad \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}}$$

Figura 4. 19. Asociación de condensadores en paralelo.

Observamos que la capacidad equivalente en serie tiene la misma fórmula que la resistencia equivalente en paralelo, y viceversa.

4.4.3 Bobina

Una bobina es un elemento pasivo capaz de almacenar energía eléctrica en forma de campo magnético. Está formada por un conductor arrollado en forma de hélice alrededor de un núcleo. El núcleo suele ser de material ferromagnético.

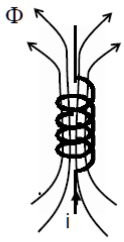


Figura 4. 20. Bobina.

Al circular corriente por el conductor aparece un flujo magnético en el interior del núcleo de la bobina en la dirección de su eje. El flujo magnético es proporcional a la corriente según la siguiente ecuación:

$$N \cdot \phi(t) = L \cdot i(t)$$

Donde:

- N es el número de espiras de la bobina (número de vueltas del arrollamiento)
- ϕ es el flujo magnético concatenado con una espira, medido en Weber (Wb)
- L es el coeficiente de autoinducción de la bobina (o inductancia), característica propia de la bobina, medida en Henrios (H). L depende del material del núcleo (con núcleos ferromagnéticos, que conducen bien el flujo magnético, se consigue L elevado), así como de la geometría del núcleo (cuanta mayor sección y menor longitud, mayor L).

Derivando ambos miembros de la ecuación anterior, obtenemos:

$$N \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Teniendo en cuenta la ley de Faraday "La fuerza electromotriz (tensión) inducida en una espira es igual a la variación del flujo inductor", deducimos que el término de la izquierda de la ecuación anterior es la tensión en bornes de la bobina:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

De la ecuación anterior se deduce que si *i(t)* es constante, *u = 0*, por lo que en corriente continua una bobina se comporta como un cortocircuito (no hay diferencia de potencial o tensión entre sus extremos en el régimen permanente).

También se deduce que la corriente no puede cambiar bruscamente (*di/dt = ∞*), puesto que eso implicaría tensión infinita, lo cual no es posible. Las bobinas se oponen a los cambios bruscos de corriente, respondiendo con tensiones elevadas.

A partir de la ecuación anterior, integrando:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{di(t)}{dt} dt = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} u(t) dt$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(t)dt$$

Potencia y energía:

La potencia absorbida en un instante dado por una bobina es:

$$p_{abs}(t) = u(t) \cdot i(t) = L\frac{di(t)}{dt} \cdot i(t)$$

En un instante dado *t*, la potencia absorbida puede ser > 0 (absorbida) o bien < 0 (cedida).

La energía almacenada entre un tiempo t_0 y t es:

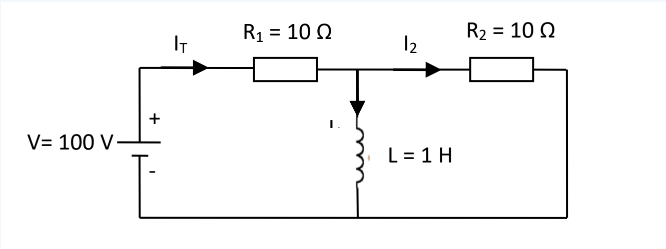
$$W_{abs}(t) = \int_{t_0}^{t} p_{abs}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} L\frac{di(t)}{dt} \cdot i(t)\,dt = L\int_{t_0}^{t} i(t)di(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$$

(si se supone que $i(t_0)=0$)

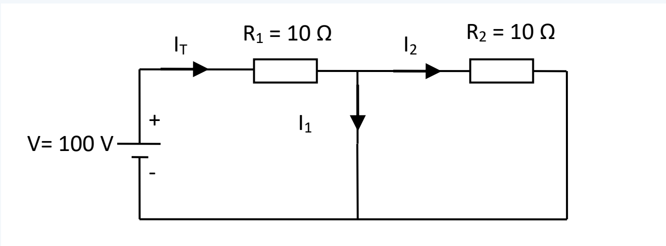
La energía almacenada es siempre mayor o igual que cero. Si la bobina cede potencia lo hace a expensas de la energía previamente almacenada, por tanto, es un elemento pasivo.

Ejemplo 4.8.

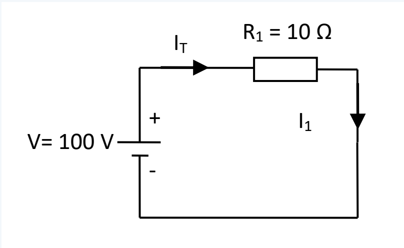
En el siguiente circuito, calcular las intensidades por el circuito y la tensión en los distintos componentes en el régimen permanente. Determinar también la energía que almacena la bobina en régimen permanente.



En corriente continua, la bobina se comporta como cortocircuito en el régimen permanente, por lo que $I_2 = 0$, ya que no se irá ninguna corriente por la resistencia R_2, al estar en paralelo con un cortocircuito:



El circuito equivalente es:



El circuito equivalente queda con una sola resistencia, por lo que $I_T = I_1 = V/R_1 = 100 / 10 = 10$ A.

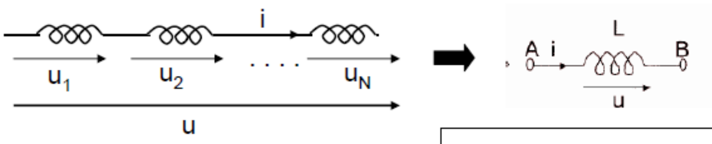
La tensión en la resistencia R_1 es la de la fuente (100 V).

La tensión en la bobina es 0 V puesto que es equivalente a un cortocircuito. La tensión en la resistencia R_2 es también 0 V por estar en paralelo con la bobina.

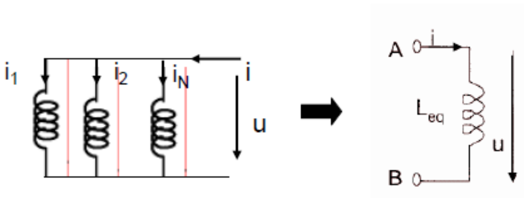
La energía almacenada por la bobina será:

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot {I_1}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 = 50\,J$$

Asociación de bobinas en serie o en paralelo:



$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots\ldots + L_N = \sum_{k=1}^{N} L_k$$



$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_N}$$

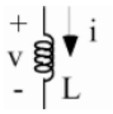
Figura 4. 21. Asociación de bobinas en serie y en paralelo.

4.4.4 Resumen de elementos pasivos

- Resistencia

$$u(t) = Ri(t) \qquad i(t) = Gu(t)$$

- Bobina



$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad i = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(t)dt$$

- Condensador

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt \qquad i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

4.5 Elementos activos

Los elementos activos son los encargados de suministrar energía eléctrica al circuito (fuentes o generadores). En la siguiente figura se muestran los tipos de fuentes que podemos encontrar:

- Fuentes de tensión
  - Ideales
    - Independientes
    - Dependientes
  - Reales
    - Independientes
    - Dependientes
- Fuentes de corriente
  - Ideales
    - Independientes
    - Dependientes
  - Reales
    - Independientes
    - Dependientes

Las fuentes de tensión ideales suministran una determinada tensión, independientemente de la corriente que necesite el circuito. Por el contrario, las fuentes de intensidad ideales proporcionan una determinada intensidad, independientemente de la tensión que necesite el circuito.

Las fuentes reales incorporan resistencias internas que las hace perder su idealidad, es decir, hacen que dependiendo de cómo sea el circuito al que van conectadas, la tensión o la corriente varíen.

Las fuentes dependientes suministran tensión o corriente que depende de algún parámetro del circuito.

4.5.1 Fuente ideal de tensión

Una fuente ideal de tensión es un dispositivo que proporciona energía eléctrica con una determinada tensión que es independiente de la corriente que circula por él. La siguiente figura muestra la representación de la fuente ideal de tensión. El símbolo de las dos líneas paralelas, una más larga que la otra, se utiliza para corriente continua, mientras que el símbolo del círculo se utiliza para cualquier tipo de onda. En ambos casos, el signo positivo marca el punto de mayor potencial.

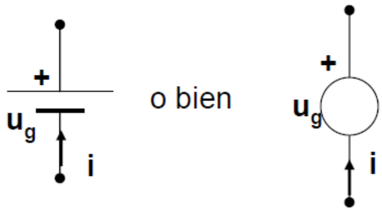
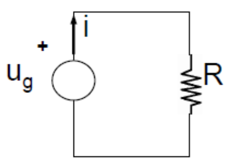


Figura 4. 22. Fuente ideal de tensión.

Si se conecta una carga a la fuente de tensión ideal, ésta suministrará a la carga la corriente necesaria, permaneciendo la tensión independiente de la carga.

Potencia entregada por la fuente:

La siguiente figura muestra una fuente ideal de tensión conectada a una resistencia de valor R. La potencia que suministra la fuente a la resistencia vendrá dada por el producto de la tensión por la intensidad, tal y como se muestra. En la figura de la derecha se muestra cómo es la variación de la potencia generada con el valor de la resistencia. Así, cuando el valor de la resistencia es alto, la potencia cedida por la fuente es menor que cuando conectamos resistencias de valor menor.



$$p_g = u_g i = \frac{u_g^2}{R} = u_g^2 G$$

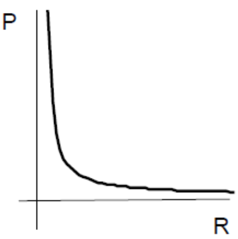


Figura 4. 23. Potencia entregada por una fuente de tensión a una resistencia.

Pregunta: ¿Qué ocurre si se conecta una resistencia de 0 Ω, es decir, un cortocircuito?

4.5.2 Fuente ideal de corriente

Una ideal fuente de corriente es un dispositivo que proporciona energía eléctrica con una determinada corriente que es independiente de la tensión en bornes. La siguiente figura muestra dos formas de representar la fuente ideal de intensidad. En ambos casos, la flecha indica el sentido de la circulación de la corriente. Si se conecta una carga a la fuente ideal de intensidad, ésta suministrará a la carga la tensión necesaria, permaneciendo la corriente independiente de la carga.

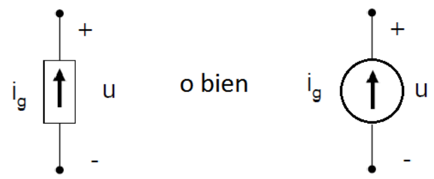
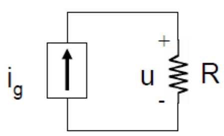


Figura 4. 24. Fuente ideal de tensión.

Potencia entregada por la fuente:

La siguiente figura muestra una fuente ideal de corriente conectada a una resistencia de valor R. La potencia que suministra la fuente a la resistencia vendrá dada por el producto de la tensión por la intensidad, tal y como se muestra. En la figura de la derecha se muestra cómo es la variación de la potencia generada con el valor de la resistencia. Así, cuando el valor de la resistencia es alto (valores bajos de G), la potencia cedida por la fuente es mayor que cuando conectamos resistencias de valor menor (valores altos de G).



$$p_g = ui_g = Ri_g{}^2 = \frac{i_g^2}{G}$$

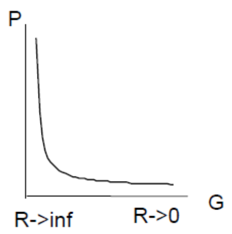


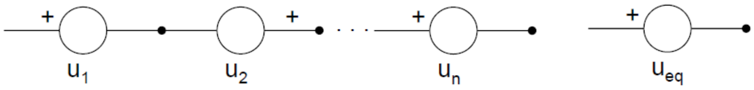
Figura 4. 25. Potencia entregada por una fuente ideal de intensidad a una resistencia.

<u>Pregunta:</u> ¿Qué ocurre si se conecta una resistencia infinita?

4.5.3 Asociación de fuentes ideales en serie

Como ya se ha comentado para el caso de asociación de elementos pasivos en serie, la corriente que circula por varios elementos conectados en serie es la misma. Por tanto, no pueden conectarse fuentes de corriente de distinta intensidad en serie.

Sí pueden conectarse fuentes de tensión en serie, y esto es equivalente a una sola fuente cuya tensión sea la suma de las tensiones de las fuentes conectadas en serie (con su signo).



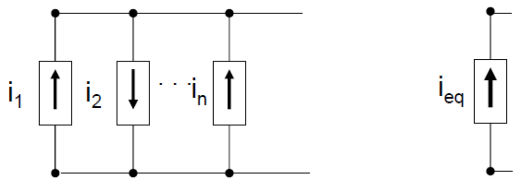
$$\boxed{u_{eq} = u_1 - u_2 + \ldots + u_N} \qquad \boxed{u_{eq} = \sum_{k=1}^{N} u_k}$$

Figura 4. 26. Asociación en serie de fuentes de tensión ideales.

4.5.4 Asociación de fuentes ideales en paralelo

Cuando se conectan varios elementos en paralelo, la tensión en sus bornes es la misma. Por tanto, no pueden conectarse fuentes de tensión de distinta tensión en paralelo.

Las fuentes de corriente en paralelo son equivalentes a una sola fuente cuya intensidad es la suma de las corrientes de las fuentes conectadas en paralelo (con su signo).



$$i_{eq} = i_1 - i_2 + \ldots + i_N \qquad i_{eq} = \sum_{k=1}^{N} i_k$$

Figura 4. 27. Asociación en paralelo de fuentes de intensidad ideales.

4.5.5 Fuentes dependientes

Existen 4 tipos de fuentes dependientes, tal y como se muestra en la figura. La magnitud de la fuente dependiente está ligada a otra magnitud de un elemento determinado del circuito.

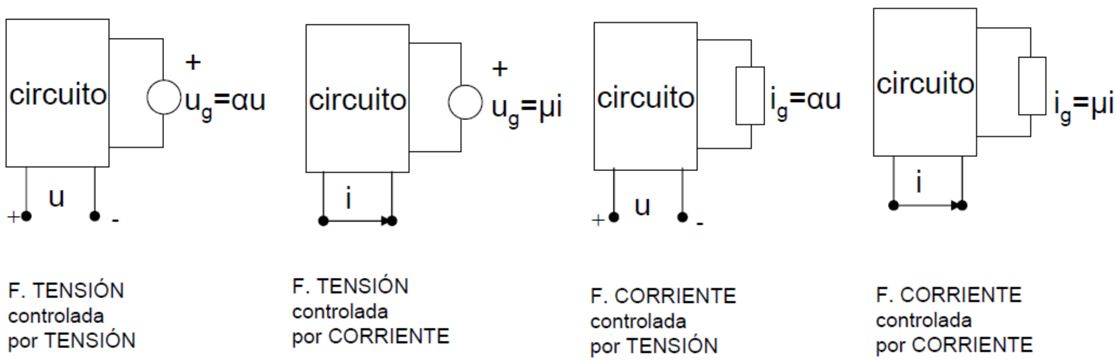


Figura 4. 28. Fuentes dependientes.

4.5.6 Fuente real de tensión

Una fuente real de tensión es un elemento de un circuito que proporciona energía eléctrica con una determinada tensión *u(t)* que depende de la corriente que pasa por él.

El esquema equivalente es el de una fuente de tensión ideal en serie con una resistencia interna *Rg*, que suele tener un valor pequeño pero no nulo, tal y como se muestra en la siguiente figura.

Cuanto mayor sea la corriente que atraviesa la fuente mayor será su caída de tensión interna (*Rgi*) y por tanto menor será la tensión en bornes *u*.

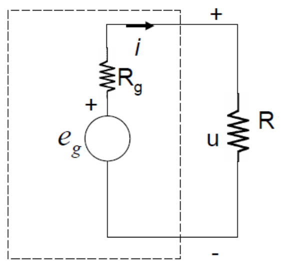


Figura 4. 29. Fuente de tensión real.

Resolviendo el circuito de la figura, la tensión en bornes es:

$$u = e_g - R_g \cdot i$$

O, de otra forma:

$$u = R \cdot i$$

La intensidad por el circuito es:

$$i = \frac{e_g}{R_g + R}$$

Sustituyendo, queda la tensión en bornes de la fuente:

$$u = e_g \cdot \frac{R}{R_g + R}$$

Que es la ecuación del divisor de tensión.

En la siguiente figura se muestra la curva tensión en bornes frente a intensidad suministrada por la fuente real, *u = f(i).* Si no hay ninguna carga conectada, es decir, si tenemos circuito abierto, la corriente es nula (*i=0*) y por tanto no hay caída de tensión en la resistencia interna (*Rg·I*), por lo que la tensión en bornes es igual a la interna, *u = eg*.

Si se cortocircuitan los bornes de la fuente (se unen con un cable sin resistencia, *R* = 0), la tensión en bornes es cero (*u*=0), y la corriente será *i = eg / Rg*.

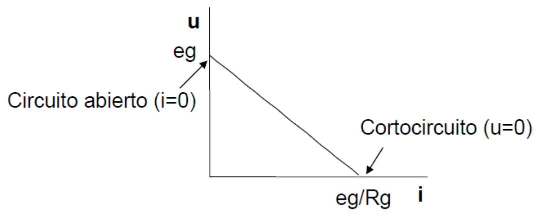


Figura 4. 30. Curva tensión/intensidad en una fuente de tensión real.

4.5.7 Fuente real de corriente

Una fuente real de corriente es un elemento de un circuito que proporciona energía eléctrica con una determinada corriente *i(t)* que depende de la tensión en bornes de la fuente.

El esquema equivalente es el de una fuente de corriente ideal en paralelo con una resistencia interna R_g, que suele tener un valor elevado pero no infinito.

Cuanto mayor sea la corriente que atraviesa la fuente mayor será su caída de tensión interna ($R_g i$) y por tanto menor será la tensión en bornes u.

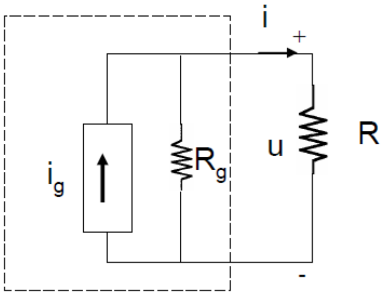


Figura 4. 31. Fuente de intensidad real.

Resolviendo el circuito anterior, la corriente entregada a la carga es:

$$i = i_g - \frac{u}{R_g}$$

O, de otra forma:

$$i = \frac{u}{R}$$

La tensión en bornes es:

$$u = i \cdot R = (i_g - i) \cdot R_g$$

Despejando de la ecuación anterior, queda la corriente entregada a la carga:

$$i = i_g \cdot \frac{R_g}{R + R_g}$$

Que es la ecuación del divisor de corriente.

En la siguiente figura se muestra la curva intensidad suministrada por la fuente real frente a tensión en bornes, $i = f(u)$:

Si no hay ninguna carga conectada, es decir, tenemos circuito abierto, la corriente es nula (i=0) y por tanto toda la corriente i_g se va por R_g, por lo que la tensión en bornes es igual a la caída de tensión en R_g, quedando $u = i_g \cdot R_g$.

Si se cortocircuitan los bornes de la fuente (se unen con un cable sin resistencia, R = 0), la tensión en bornes es cero (u=0), y toda la corriente se va por el cortocircuito, $i = i_g$.

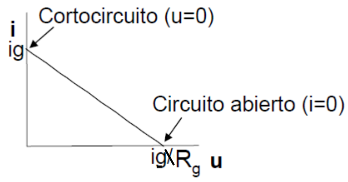


Figura 4. 32. Curva intensidad/tensión en una fuente real de intensidad.

4.5.8 Equivalencia entre una fuente real de tensión y otra de intensidad

Sean las fuentes reales mostradas en la figura siguiente.

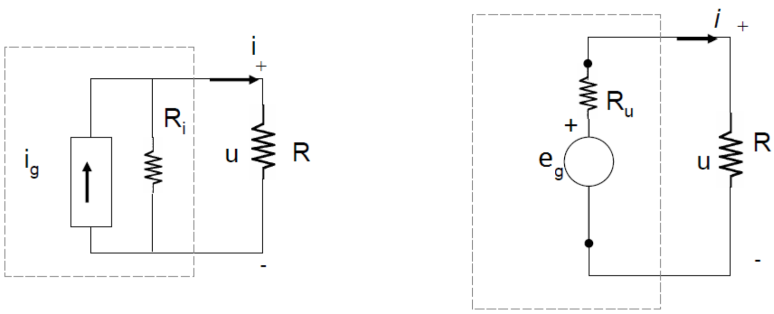


Figura 4. 33. Fuente real de intensidad y fuente real de tensión.

La corriente entregada por la fuente real de intensidad a la carga es:

$$i = i_g - \frac{u}{R_i}$$

La ecuación de la tensión en bornes de la fuente de tensión es:

$$u = e_g - R_u \cdot i$$

Para que las dos fuentes sean equivalentes, deberán suministrar las dos la misma tensión *u* y la misma intensidad *i* en bornes. Despejando *u* de la primera ecuación e igualando con la segunda, queda:

$$(i_g - i) \cdot R_i = e_g - R_u \cdot i$$

$$R_i \cdot i_g - R_i \cdot i = e_g - R_u \cdot i$$

Comparando términos se obtienen las siguientes relaciones:

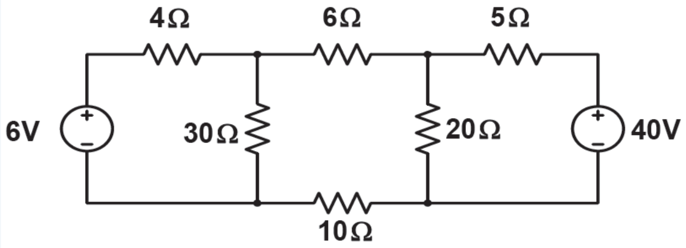
$$R_i = R_u$$

$$e_g = R_i \cdot i_g \qquad\qquad i_g = e_g / R_u$$

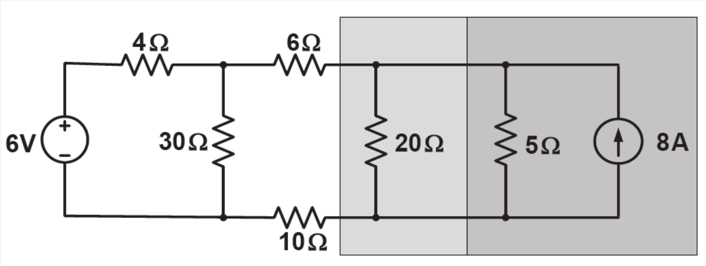
Por tanto, podemos convertir una fuente real de intensidad a fuente de tensión o viceversa mediante las relaciones anteriores.

Ejemplo 4.9.

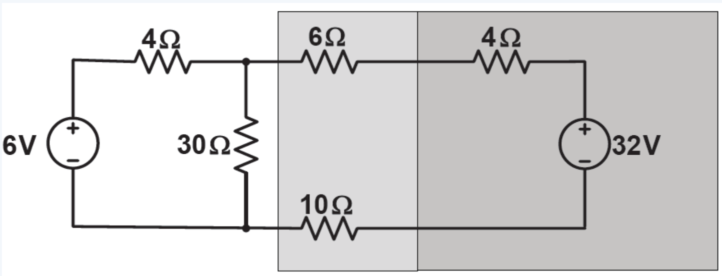
Dado el circuito de la figura siguiente, calcular la potencia que suministra la fuente de 6 V. Reducir el circuito realizando sucesivas transformaciones de las fuentes.



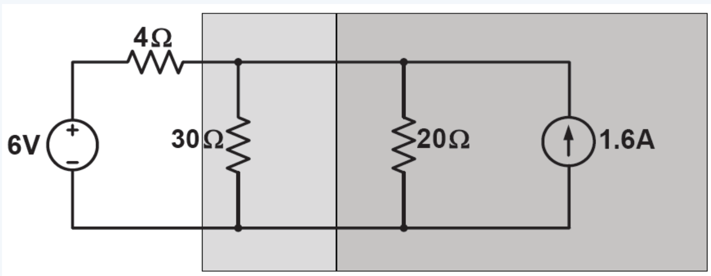
El conjunto de la fuente de tensión ideal de 40 V en serie con la resistencia de 5 Ω lo podemos considerar como una fuente real de tensión. Esa fuente de tensión real la transformamos a fuente real de intensidad, siendo $i_g = e_g/R_u = 40/5 = 8\ A$. *La resistencia en paralelo con la fuente ideal de intensidad será* $R_i = R_u = 5\ \Omega$.



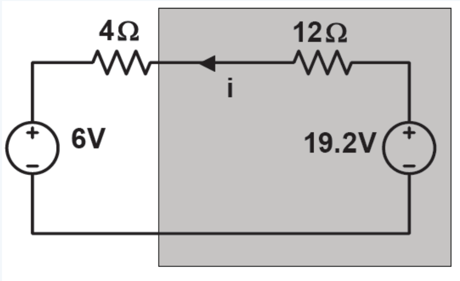
A continuación, obtenemos el equivalente de la resistencia de 5 Ω en paralelo con la de 20 Ω, quedando 5·20/(5+20) = 4 Ω. La fuente real de intensidad compuesta por la fuente ideal de 8 A en paralelo con la resistencia de 4 Ω se puede transformar a fuente de tensión real de $e_g = R_i \cdot i_g = 4 \cdot 8 = 32\ V$ *en serie con* $R_u = R_i = 4\ \Omega$.



Ahora podemos sumar las tres resistencias que están en serie con la fuente de 32 V, es decir, 6+4+10 = 20 Ω. Tendremos por tanto una fuente de tensión real, compuesta por una fuente ideal de 32 V en serie con una resistencia de 20 Ω. Esta fuente la podemos convertir en fuente real de intensidad, mediante: $i_g = e_g/R_u = 32/20 = 1{,}6\ A$, *siendo la resistencia interna la misma* $R_i = R_u = 20\ \Omega$.



Las resistencias de 30 Ω y de 20 Ω están en paralelo, resultando 30·20/(30+20) = 12 Ω. Por tanto, la fuente ideal de intensidad e 1,6 A está en paralelo con 12 Ω, pudiendo considerarse *todo el conjunto como una fuente real de intensidad, que puede convertirse a fuente de tensión mediante la transformación:* $e_g = R_i \cdot i_g = 12 \cdot 1{,}6 = 19{,}2\ V$ *en serie con* $R_u = R_i = 12\ \Omega$.



A partir de este circuito ya podemos calcular la corriente que suministra la fuente de 6 V (en realidad no suministra, sino que consume, ya que la otra fuente suministra más tensión y por tanto la corriente fluirá de la fuente de más tensión hacia la de menos):

$$i = \frac{19{,}2 - 6}{12 + 4} = 0.825\ A$$

Como la corriente entra por el borne de más tensión de la fuente de 6 V, esto implica que dicha fuente consume potencia. La potencia consumida es:

$$P_{6V} = 6V \cdot 0{,}825A = 4{,}95\ W$$

4.6 Métodos sistemáticos de resolución de circuitos

Existen métodos que permiten resolver los circuitos de forma ordenada escribiendo las ecuaciones del circuito en función del mínimo número de variables. Son métodos sencillos y fáciles de aplicar, y se basan en las leyes de Kirchhoff.

Existen dos métodos:

- Método de mallas
- Método de nudos

4.6.1 Método de mallas

Este método consiste en aplicar la 2ª ley de Kirchhoff a todas las mallas de un circuito.

Una malla se define como el conjunto de ramas que forman un camino cerrado y que no contienen ninguna otra línea cerrada en su interior.

De la 2ª ley de Kirchhoff tenernos que la suma algebraica de las tensiones a lo largo de cualquier línea cerrada en un circuito es nula en todo instante.

$$\Sigma\ v(t) = 0$$

Datos e incógnitas:

Número de nudos: *n*

Número de ramas: *r* (en las que la corriente es desconocida)

Incógnitas: *r* corrientes (una por cada rama)

Ecuaciones:

n-1 ecuaciones en las que se aplica la 1ª Ley de Kirchoff a n-1 nudos.

r- (n-1) ecuaciones en las que se aplica la 2ª Ley de Kirchoff a las *r-(n-1)* mallas.

Pasos a seguir:

Para ilustrar este método vamos a aplicarlo al circuito de la siguiente figura.

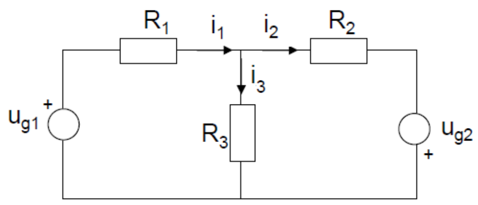


Figura 4. 34. Paso 1 en el método de mallas.

En este ejemplo tenemos:

Número de nudos: *2*

Número de ramas: *3* (en las que la corriente es desconocida)

Incógnitas: *3* corrientes (una por cada rama)

Ecuaciones:

2-1 ecuaciones en las que se aplica la 1ª Ley de Kirchoff.

3- (2-1) ecuaciones en las que se aplica la 2ª Ley de Kirchoff a las *3-(2-1)* mallas.

Como paso previo es conveniente sustituir todas las fuentes reales de corriente por fuentes reales de tensión. En este ejemplo, esto no es necesario, puesto que sólo tiene fuentes de tensión.

Paso 1. Aplicar a n-1 nudos la 1ª Ley de Kirchhoff.

En este ejemplo, tenemos r = 3 ramas, es decir, 3 incógnitas (las 3 corrientes de malla, i_1, i_2 e i_3) y hay dos nudos (n=2), por lo que aplicamos la 1ª Ley de Kirchhoff (suma de corrientes igual a cero) a uno de ellos, por ejemplo el de arriba:

$$\mathrm{i}_1 - \mathrm{i}_2 - \mathrm{i}_3 = 0$$

Donde se han considerado las corrientes entrantes positivas y las salientes negativas.

O, de otra forma, suma de corrientes entrantes igual a suma de corrientes salientes.

$$\mathrm{i}_1 = \mathrm{i}_2 + \mathrm{i}_3$$

Paso 2. Aplicar la 2ª Ley de Kirchhoff a r-(n-1) = 3-(2-1) = 2 mallas

Se considera las elevaciones de tensión negativas y las caídas de tensión positivas.

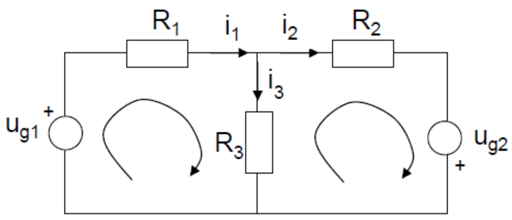


Figura 4. 35. Paso 2 en el método de mallas.

En el ejemplo, tenemos:

Malla izquierda recorrida en el sentido del reloj:

$$-u_{g1} + R_1 \cdot i_1 + R_3 \cdot i_3 = 0$$

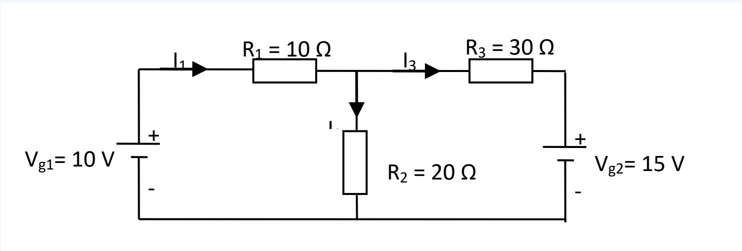
Malla derecha recorrida en el sentido del reloj:

$$-u_{g2} - R_3 \cdot i_3 + R_2 \cdot i_2 = 0$$

Al final tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas (i_1, i_2 e i_3).

Ejemplo 4.10.

Dado el circuito de la figura siguiente, calcular la corriente por cada rama. A continuación, calcular las caídas de tensión en cada resistencia.



Hay 3 ramas (r=3) y 2 nudos (n=2). Aplicamos la 1ª LDK a un nudo (n-1 = 1), por ejemplo el de arriba:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

Se aplica la 2ª LDK a r-(n-1) = 3-(2-1) = 2 mallas, considerando las elevaciones de tensión negativas y las caídas de tensión positivas. Recorreremos las dos mallas en el sentido de las agujas del reloj.

Malla izquierda:

$$-V_{g1} + R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 = 0$$

$$-10 + 10 \cdot i_1 + 20 \cdot i_2 = 0$$

Malla derecha:

$$V_{g2} - R_2 \cdot i_2 + R_2 \cdot i_3 = 0$$

$$15 - 20 \cdot i_2 + 30 \cdot i_3 = 0$$

Ya tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$-10 + 10 \cdot i_1 + 20 \cdot i_2 = 0$$

$$15 - 20 \cdot i_2 + 30 \cdot i_3 = 0$$

Lo dejamos ordenado:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$10 \cdot i_1 + 20 \cdot i_2 = 10$$

$$-20 \cdot i_2 + 30 \cdot i_3 = -15$$

Resolviendo, se obtiene: i_1 = 0,182 A; i_2 = 0,409 A; i_3 = - 0,227 A (esta corriente, al resultar negativa, en realidad circula al revés de lo supuesto, es decir, por R_3 de derecha a izquierda).

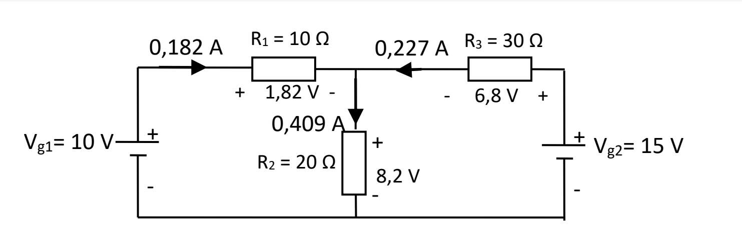
Las caídas de tensión en cada resistencia serán:

$$V_{R1} = i_1 \cdot R_1 = 0{,}182 \cdot 10 = 1{,}82\ V$$

$$V_{R2} = i_2 \cdot R_2 = 0{,}409 \cdot 20 = 8{,}2\ V$$

$$V_{R3} = i_3 \cdot R_3 = -0{,}227 \cdot 30 = -6{,}8\ V$$

(El signo menos de V_{R3} indica que por R_3 la corriente va de derecha a izquierda, por lo que hay 6,81 V más en el terminal derecho que en el izquierdo).



Se comprueba las tensiones de las mallas:

$$\textit{Malla izda: } -10 + 1{,}82 + 8{,}2 = 0$$

$$\textit{Malla dcha: } 15 - 8{,}2 - 6{,}8 = 0$$

4.6.2 Método de nudos

Este método consiste en aplicar la 1ª ley de Kirchhoff a todos los nudos de un circuito.

Un nudo se define como cada una de las confluencias de varias ramas.

De la 1ª ley de Kirchhoff tenernos que la suma algebraica de las intensidades que entran en un nudo es nula en todo instante.

$$\Sigma\ i(t) = 0$$

En este método uno de los nudos se emplea como nudo de referencia y se denota mediante el símbolo ⏚ ó ⏚.

Datos e incógnitas:

Número de nudos: n

Número de incógnitas: n-1, Las *tensiones de nudo* son las tensiones de cada nudo (distinto del de referencia) con respecto al nudo de referencia. Hay n-1 incógnitas, las tensiones de todos los nudos (salvo el de referencia) respecto del nudo de referencia.

Número de ecuaciones: n-1 ecuaciones en las que se aplica la 1ª Ley de Kirchoff a n-1 nudos.

Pasos a seguir:

Para ilustrar este método va a aplicarse al circuito mostrado en la siguiente figura:

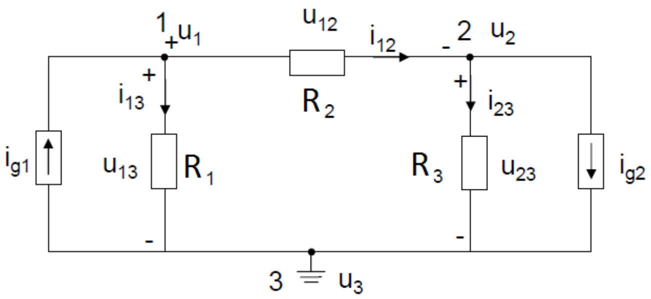


Figura 4. 36. Paso 1 en el método de nudos.

En este ejemplo tenemos:

Número de nudos: *3*

Incógnitas: *2* tensiones (una por cada nudo respecto del nudo de referencia)

Ecuaciones:

2 ecuaciones en las que se aplica la 1ª Ley de Kirchoff.

Como paso previo es conveniente sustituir todas las fuentes reales de tensión por fuentes reales de corriente. En este ejemplo no es necesario puesto que todas las fuentes son de intensidad.

<u>Paso 1.</u> Identificar los nudos del circuito.

En el ejemplo hay n = 3 nudos. Nótese que abajo hay un solo nudo y no dos, ya que es todo el mismo punto eléctrico.

<u>Paso 2.</u> Elegir un nudo de referencia

El nudo de referencia o de tierra se denota mediante el símbolo ó . El nudo de referencia se considera que tiene potencial cero (u=0). En el ejemplo se ha elegido el nudo 3 como el nudo de referencia.

<u>Paso 3.</u> Definir la tensión de cada nudo

Se define la tensión de nudo como el potencial de un nudo respecto al nudo de referencia.

En el ejemplo:

$$u_{13} = u_1 - u_3 = u_1$$

$u_{23} = u_2 - u_3 = u_2$

$u_{12} = u_1 - u_2$

Paso 4. Aplicar la 1ª Ley de Kirchhoff a todos los nudos menos al de referencia (n-1 nudos).

En el ejemplo aplicamos la 1ª LDK a los nudos 1 y 2:

Nudo 1:

$$i_{g1} - i_{12} - i_{13} = 0$$

$$i_{g1} - \frac{u_1 - u_2}{R_2} - \frac{u_1}{R_1} = 0$$

Nudo 2:

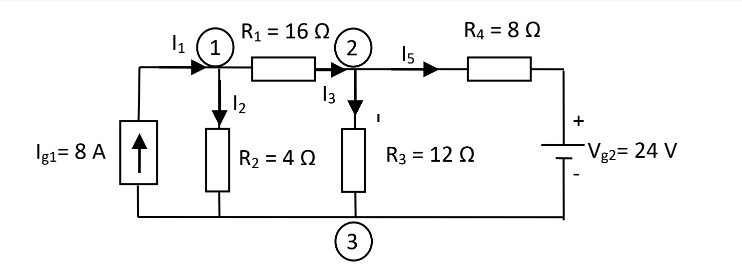
$$i_{12} - i_{23} - i_{g2} = 0$$

$$\frac{u_1 - u_2}{R_2} - \frac{u_2}{R_3} - i_{g2} = 0$$

Con lo que tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas (u_1 y u_2).

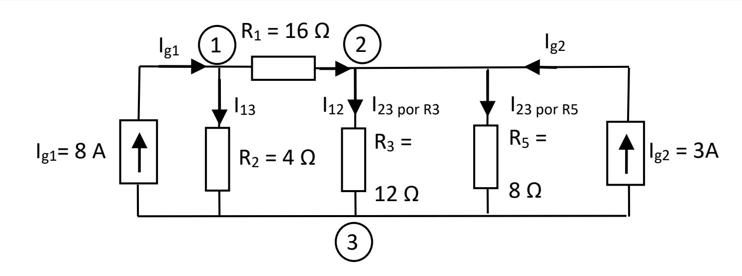
Ejemplo 4.11.

Dado el circuito de la figura siguiente, calcular la tensión en cada nudo (respecto del de referencia, que será el de abajo) y la corriente por cada rama (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5).



Como vamos a aplicar el método de nudos, primero convertimos el generador de tensión real de la derecha (fuente ideal de 24 V en serie con resistencia de 8 Ω) a generador de corriente real:

$i_{g2} = V_{g2}/R_4 = 24/8 = 3\ A$. *La resistencia en paralelo con la fuente ideal de intensidad será la misma resistencia, que llamaremos $R_5 = 8\ \Omega$.*



Existen 3 nudos en el circuito. El nudo de referencia será el número 3 (u_3 = 0 V).

Aplicamos la 1ª LDK a los otros dos nudos.

Nudo 1:

$$i_{g1} - i_{12} - i_{13} = 0$$

$$i_{g1} - \frac{u_1 - u_2}{R_1} - \frac{u_1}{R_2} = 0$$

$$8 - \frac{u_1 - u_2}{16} - \frac{u_1}{4} = 0$$

Nudo 2:

$$i_{12} - i_{23\ por\ R3} - i_{23\ por\ R5} + i_{g2} = 0$$

$$\frac{u_1 - u_2}{R_1} - \frac{u_2}{R_3} - \frac{u_2}{R_5} + i_{g2} = 0$$

$$\frac{u_1 - u_2}{16} - \frac{u_2}{12} - \frac{u_2}{8} + 3 = 0$$

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$5u_1 - u_2 = 128$$

$$3u_1 - 13u_2 = -144$$

Resolviendo se obtiene:

u_1 = 29,16 V; u_2 = 17,8 V.

Las corrientes por las ramas del circuito original (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) se calculan como sigue:

$$I_1 = I_{g1} = 8A$$

$$I_2 = \frac{u_1}{R_2} = \frac{29{,}16}{4} = 7{,}29A$$

$$I_3 = \frac{u_1 - u_2}{R_1} = \frac{29{,}16 - 17{,}8}{16} = 0{,}71A$$

$$I_4 = \frac{u_2}{R_3} = \frac{17{,}8}{12} = 1{,}48A$$

$$I_5 = \frac{u_2 - V_{g2}}{R_4} = \frac{17{,}8 - 24}{8} = -0{,}77A$$

(La corriente I_5, al resultar negativa, indica que en realidad sale de la fuente de 24 V en lugar de entrar a la fuente).

Se comprueba en el circuito original la 1ª LDK en los nudos:

Nudo 1:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$8 - 7{,}29 - 0{,}71 = 0$$

Nudo 2:

$$i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

$$0{,}71 - 1{,}48 - (-0{,}77) = 0$$

Nudo 3:

$$-i_1 + i_2 + i_4 + i_5 = 0$$

$$-8 + 7{,}29 + 1{,}48 + (-0{,}77) = 0$$

4.7 Formas de onda

Hasta ahora hemos visto circuitos en los que las fuentes, tanto de tensión como de corriente, son de continua, es decir, la tensión y la intensidad, en régimen permanente, son invariables en el tiempo.

Sin embargo, en muchos circuitos eléctricos existen fuentes de tensión o de intensidad tales que sus valores varían con el tiempo. A estas variaciones temporales se les denomina formas de onda.

Habitualmente se utilizan ondas periódicas, es decir, que su forma se repite indefinidamente. A continuación veremos las formas de onda más comunes en electricidad y electrónica y se definirán las características de las ondas periódicas.

4.7.1 Ondas periódicas

Una onda es periódica si cumple:

$$f(t) = f(t + k \cdot T)$$

donde *t* es el tiempo y *T* es el período de la onda, con k=1,2,3…

De aquí en adelante, en lugar de *f(t)* utilizaremos *v(t)* para ondas de tensión. Las ondas de corriente se tratarían igual, utilizando *i(t).*

Por ejemplo, en la figura siguiente se observa una onda periódica, en concreto es del tipo alterna senoidal. La onda se repite cada 20 ms, por lo que el periodo es dicho valor, T = 20 ms = 0,02 s.

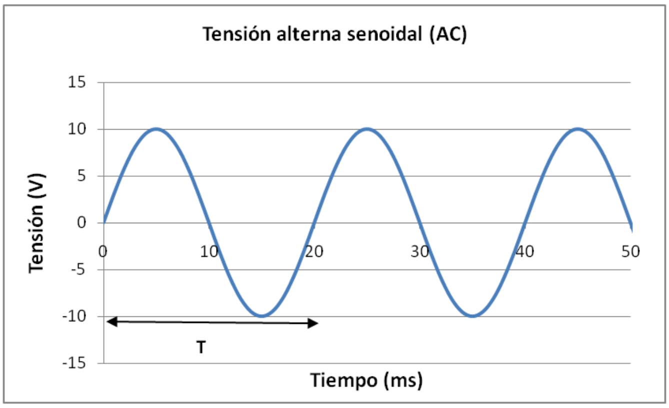


Figura 4. 37. Onda senoidal.

Para una onda periódica se definen los siguientes conceptos:

- Ciclo: es la parte de la onda periódica comprendida en un intervalo de tiempo igual a un período.
- Frecuencia (f): es el número de ciclos que tienen lugar en la unidad de tiempo. Es la inversa del periodo:

$$f = \frac{1}{T}$$

En el ejemplo, f = 1/0,02 = 50 Hz.

- Valor de cresta o valor pico o máximo o amplitud (V_{max}): es el valor máximo que toma la onda. En el ejemplo, 10 V.
- Valor de pico a pico (V_{pp}): es la diferencia algebraica entre el valor máximo y el mínimo que toma la onda. En el ejemplo, 20 V.
- Valor medio: el promedio integral de la onda en un período, es decir, el valor medio de la onda en un ciclo:

$$V_m = \frac{1}{T}\int_o^T v(t)dt$$

En el ejemplo, haciendo la integral de la onda senoidal entre 0 y T se obtiene 0 V. Puede verse gráficamente que la media es 0, ya que la semionda positiva es exactamente igual a la negativa.

- Valor eficaz: El valor eficaz de una onda de tensión (o corriente) alterna es mismo valor en voltios (o amperios) de una tensión continua que al aplicarla a una determinada resistencia óhmica pura produce los mismos efectos caloríficos (igual potencia disipada) que dicha tensión (o corriente) alterna. Matemáticamente se define según:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_o^T v^2(t)dt}$$

Ondas senoidales

La figura anterior ya se ha comentado que es una onda senoidal. Estas ondas son del tipo:

$$f(t) = F_{max} \cdot sen(\omega t)$$

Donde F_{max} es el valor máximo de la onda y ω es la pulsación ($\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, medida en rad/s).

Para una tensión:

$$v(t) = V_{max} \cdot sen(\omega t)$$

Para una corriente senoidal sería lo mismo, cambiando *v* por *i*.

Valor medio:

$$V_m = \frac{1}{T}\int_o^T v(t)dt = \frac{V_{max}}{T}\int_o^T sen(\omega t) = 0$$

Valor eficaz:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_o^T v^2(t)dt} = \sqrt{\frac{{V_{max}}^2}{T}\int_o^T sen^2(\omega t)dt} = \cdots = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

Ondas rectangulares

Estas ondas son periódicas del tipo:

$$0 < t < T_1 \Rightarrow f(t) = V_{min}$$

$$T_1 < t < T \Rightarrow f(t) = V_{max}$$

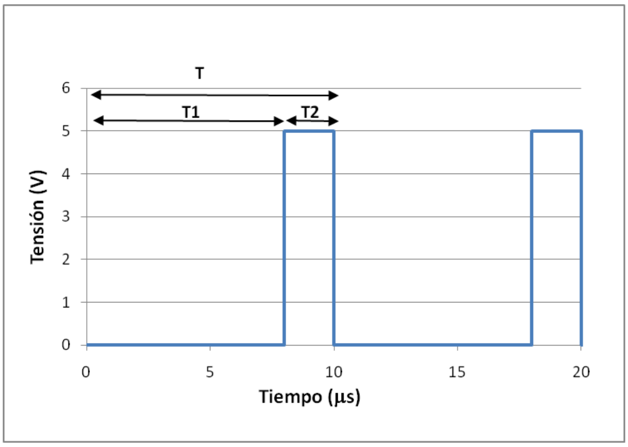


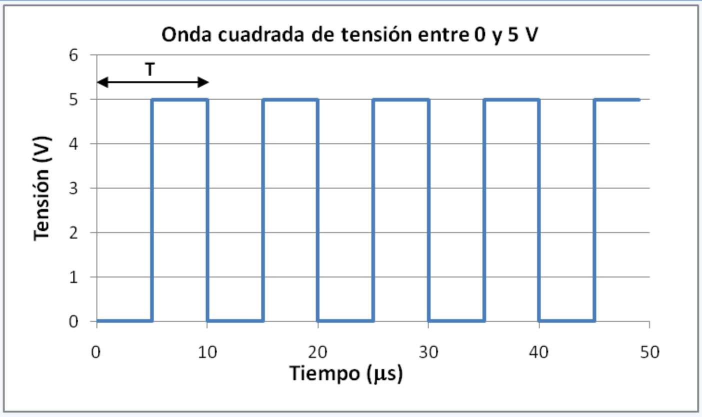
Figura 4. 38. Onda rectangular.

En la figura del ejemplo, V_{min} = 0 V y V_{max} = 5 V.

Si $T_1 = T_2$ se habla de onda cuadrada.

Ejemplo 4.12.

Dada la siguiente onda cuadrada, calcular la frecuencia, el valor medio y el valor eficaz.



Se observa que el periodo es de T = 10 μs, por lo que la frecuencia es de f = 1/T = 1/(10·10-6) = 100000 Hz = 100 kHz.

Se observa gráficamente que el valor medio de la tensión es de 2,5 V (la mitad del tiempo está a 0 V y la otra mitad a 5 V). Esto puede comprobarse mediante la ecuación:

$$V_m = \frac{1}{T}\int_o^T v(t)dt = \frac{1}{T}\left[\int_o^{T/2} v(t)dt + \int_{T/2}^{T} v(t)dt\right] = \frac{1}{T}\left[\int_o^{T/2} 0dt + \int_{T/2}^{T} V_{max}dt\right]$$
$$= \frac{1}{T}\left[0 + V_{max}\cdot\left(T - \frac{T}{2}\right)\right] = \frac{V_{max}}{2} = 2{,}5\,V$$

El valor eficaz de esta onda es:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_o^T v^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_o^{T/2} v^2(t)dt + \int_{T/2}^{T} v^2(t)dt\right]} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_o^{T/2} 0^2dt + \int_{T/2}^{T} {V_{max}}^2dt\right]}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left[0 + {V_{max}}^2\cdot\left(T - \frac{T}{2}\right)\right]} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3{,}53\,V$$

4.7.2 Ondas no periódicas

Función escalón

Se define mediante las siguientes ecuaciones:

$$f(t) = 0\ si\ t < 0$$

$$f(t) = A\ si\ t > 0$$

En el ejemplo de la figura, A = 10 V.

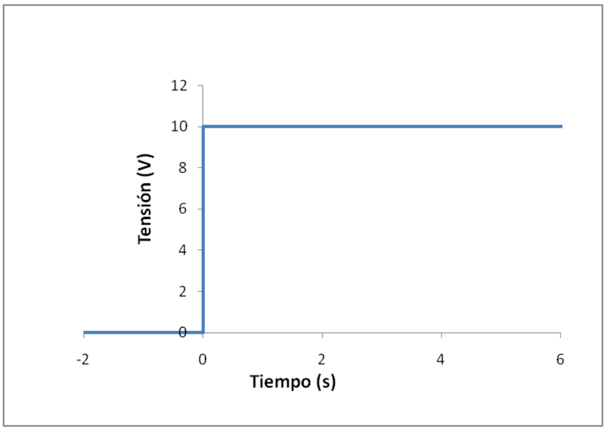


Figura 4. 39. Función escalón.

Función exponencial

Se define mediante la siguiente ecuación:

$$f(t) = A \cdot e^{-t/\tau}$$

En el ejemplo de la figura, A = 5 V y τ = 0,1 s.

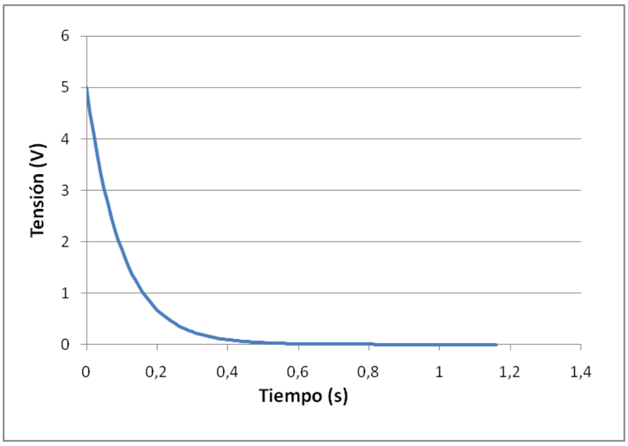


Figura 4. 40. Función exponencial.

4.8 Comportamiento de los circuitos R-C serie frente a escalones de tensión

Como ya sabemos, un condensador, en régimen permanente alimentado en continua, se comporta como un circuito abierto (no deja pasar la corriente). Ahora vamos a ver qué ocurre hasta que se alcanza el régimen permanente, es decir, durante el transitorio, cuando se conecta la fuente de tensión y ésta pasa a valer de 0 a V.

Dado el circuito de la figura, si cerramos el interruptor SW1, estamos aplicando al conjunto R-C serie un escalón de tensión V.

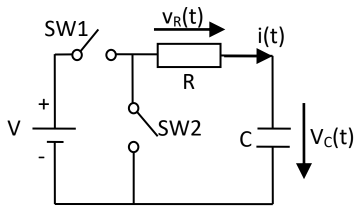


Figura 4. 41. Circuito R-C.

La tensión en la resistencia $v_R(t)$ y en el condensador $v_C(t)$, así como la corriente por el circuito *i(t)* siguen curvas exponenciales. El condensador se va cargando, partiendo de 0 V en el instante en que se cierra el interruptor y comienza el escalón (t=0), hasta que toda la tensión cae en él y ya no hay corriente por el circuito (estado estacionario o régimen permanente).

$$I(t) = \frac{V}{R} \cdot \ e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

$$v_R(t) = V \cdot \ e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

$$v_C(t) = V \cdot \left(1 - \ e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \ \right)$$

Se comprueba que en todo instante $V = v_R(t) + v_C(t)$

Se denomina constante de tiempo al producto $\tau = R \cdot C$, con unidades de tiempo (1 s = 1Ω·1F). Cuando ha transcurrido un tiempo de 5 veces la constante de tiempo (t=5τ =5·R·C), la exponencial es prácticamente cero: $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{R \cdot C}}} = \mathrm{e}^{-5} = 0{,}0067$ considerándose que se ha alcanzado el régimen permanente (el condensador se habrá cargado al 99,3%).

Es decir, para tiempos superiores a 5 veces la constante de tiempo, se considera régimen permanente. En el caso de las gráficas siguientes, la constante de tiempo es de 0, 1segundos.

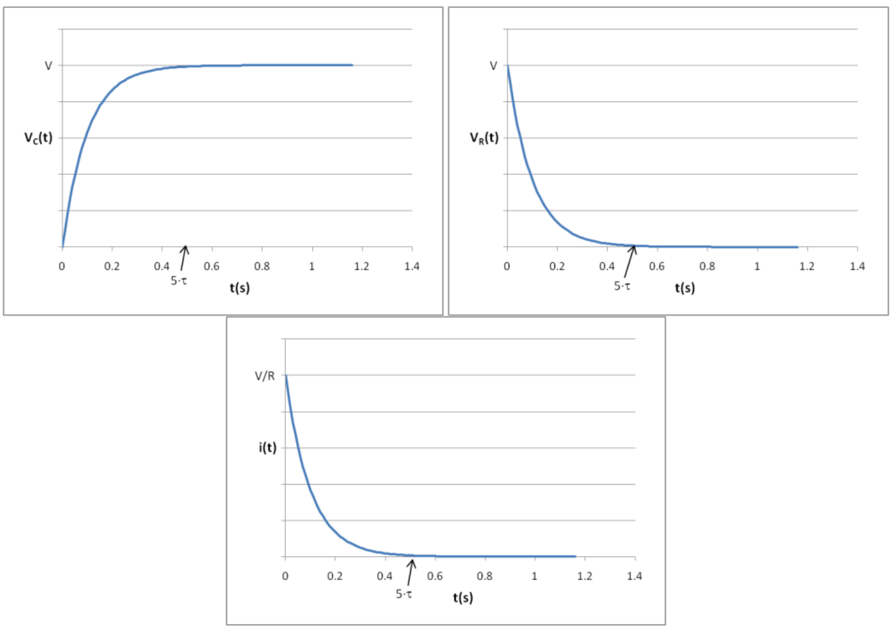


Figura 4. 42. Constante de tiempo en un circuito R-C.

Si, cuando se ha alcanzado el régimen permanente, abrimos (desconectamos) el interruptor SW1, el condensador se mantendrá cargado a la tensión V, sin corriente por el circuito.

Si después cerramos (conectamos) el interruptor SW2, el condensador se comporta como una fuente de tensión, descargándose a través de la resistencia mediante una exponencial. La corriente fluye en sentido contrario. La tensión en el condensador va disminuyendo hasta anularse. Cuando ha transcurrido un tiempo de 5 veces la constante de tiempo, se considera que el condensador está completamente descargado. En las siguientes figuras se representa la tensión en el condensador, la tensión en la resistencia y la corriente, considerando t=0 s el tiempo en que se conecta el interruptor SW1 (se conecta el circuito RC a una tensión de V voltios), y cuando ha transcurrido un tiempo t=1 s se desconecta SW1 y se conecta SW2 (es decir, es como si se conectara al circuito RC una tensión de 0 Voltios).

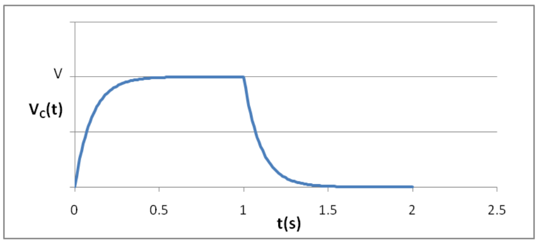


Figura 4. 43. Tensión en el condensador del circuito de la Figura 4. 41.

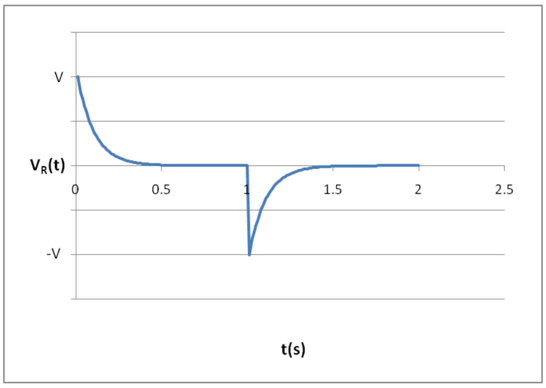


Figura 4. 44. Tensión en la resistencia del circuito de la Figura 4. 41.

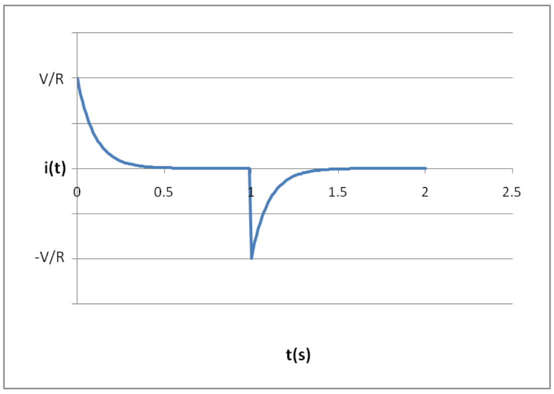


Figura 4. 45. Intensidad en el circuito de la Figura 4. 41.

El comportamiento de este circuito es exactamente igual que si le hubiésemos aplicado una fuente de tensión que suministra una onda cuadrada de tensión *v(t)* dando 5 V durante 1 s y a continuación 0 V durante el siguiente segundo.

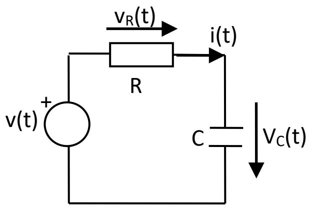
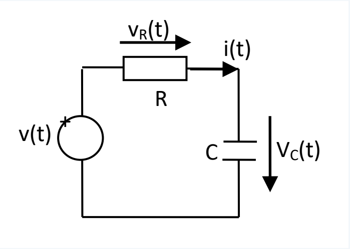


Figura 4. 46. Circuito R-C.

Ejemplo 4.13.

En el circuito R-C serie de la figura, se aplica una onda cuadrada entre 0 y 5 V de 500 Hz. El condensador es de 150 nF y la resistencia de 1 kΩ. Dibujar las ondas de tensión en el condensador, tensión en la resistencia y corriente por el circuito.

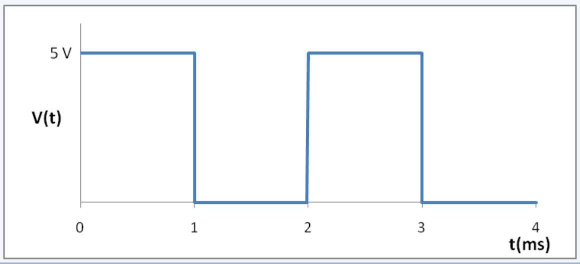


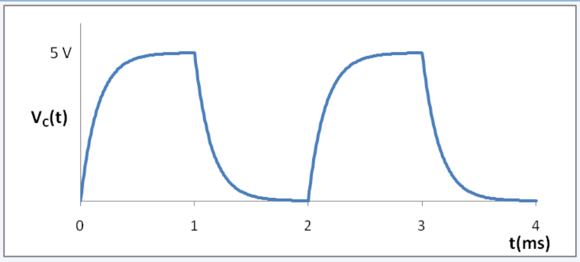
La frecuencia de 500 Hz implica que el periodo es T=1/f=1/500= 0,002 s = 2 ms. La tensión de la fuente será 5 V durante medio periodo (1 ms), y a continuación 0 V durante la otra mitad del periodo.

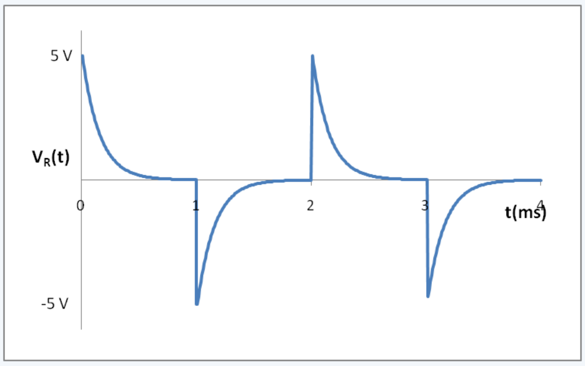
La constante de tiempo del circuito es $\tau = R \cdot C = 1000 \cdot 150 \cdot 10^{-9} = 0{,}00015s = 0{,}15\, ms.$

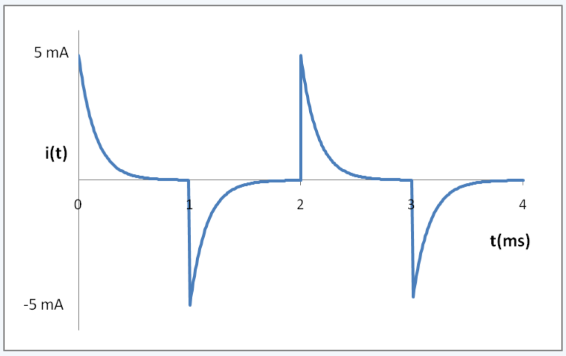
Aproximadamente cuando haya transcurrido 5·τ $= 0{,}75\, ms$, *el condensador estará cargado del todo.*

Las tensiones son curvas exponenciales entre 0 y 5 V. El máximo de la corriente es V/R = 5 / 1000 = 0,005 A = 5 mA.









4.9 Circuitos oscilantes. Circuito LC sin pérdidas.

En la figura de la derecha se ha dibujado un circuito oscilante LC ideal, es decir sin pérdidas.

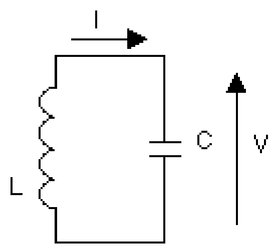


Figura 4. 47. Circuito L-C ideal.

Supóngase que, en la situación inicial, el condensador está cargado a una tensión *V* y que en ese momento se conecta la inductancia. La tensión presente en las extremidades de la inductancia va a hacer aparecer una corriente de sentido inverso a la de la flecha del dibujo, que aumentará con el tiempo. A medida que el condensador suministra corriente a la inductancia, se descarga y su tensión disminuye. La disminución de la tensión hace que la corriente aumente a una velocidad menor. La situación continúa así, con la tensión del condensador que disminuye cada vez más rápidamente (porque la corriente aumenta) y la corriente que aumenta más lentamente (porque la tensión disminuye). Llega un momento en el cual el condensador está completamente descargado y la corriente ha llegado a un máximo. Ahora la corriente continúa circulando porque la inductancia se lo impone. El condensador comienza a cargarse en el otro sentido y hace aparecer una tensión en los bornes de la inductancia que hace disminuir la corriente. La situación continúa del siguiente modo: el condensador se va cargando cada vez más lentamente (porque la corriente disminuye), mientras que la corriente va disminuyendo cada vez más rápidamente (porque la tensión inversa aumenta). Así, se llega a la situación en la cual la corriente se anula y la tensión del condensador es máxima y del mismo valor que la tensión inicial, pero con sentido opuesto. La situación es análoga a la de una masa sostenida por un resorte. La inductancia juega el papel de la masa. La masa tiene inercia e impide que el movimiento cambie bruscamente. La inductancia impide que la corriente cambie bruscamente. Veamos las ecuaciones.

El comportamiento eléctrico del condensador está descrito por la ecuación:

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

y el de la bobina:

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Según la figura 4.47, en este circuito hemos tomado el sentido positivo de la intensidad cuando sale del lado positivo de la inductancia. Como en la ecuación de definición de la bobina, la intensidad era entrante (ver apartado 4.4.3) es necesario poner un signo negativo en la ecuación de la bobina:

$$u(t) = -L\frac{di(t)}{dt}$$

El sistema de ecuaciones queda de la siguiente forma:

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = -L\frac{di(t)}{dt}$$

Para eliminar *i(t)*, basta derivar la primera ecuación:

$$\frac{di(t)}{dt} = C\frac{d^2u(t)}{dt^2}$$

y remplazar la derivada de la intensidad en la segunda:

$$u(t) = -LC\frac{d^2u(t)}{dt^2}$$

que se puede reescribir como:

$$L\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -\frac{1}{C}u(t)$$

Esta ecuación se denomina ecuación de onda y representa también otros fenómenos físicos como el comportamiento de una masa colgada de un muelle o resorte si no se considera la amortiguación. En la figura se muestra este concepto, en la parte de la derecha se muestra una pesa de masa *m* colgada de un muelle de constante k, y en la parte de la izquierda se ha representado la posición del punto A respecto del tiempo. Si no se considera amortiguación, la posición del punto A varia de forma senoidal. La fuerza que ejerce el muelle, es:

$$F = -kx$$

donde *x* es la elongación de muelle. Si aplicamos la segunda ley de Newton y tenemos en cuenta que la aceleración es la derivada segunda de la posición respecto al tiempo:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} - kx$$

que tiene la misma forma que la ecuación del circuito LC que hemos calculado anteriormente.

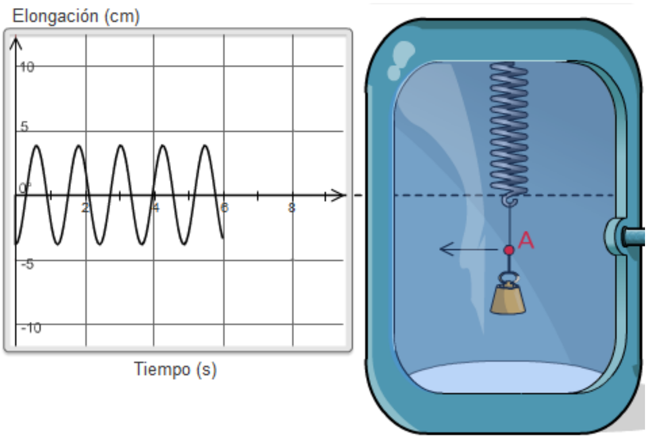


Figura 4. 48. Masa en un resorte.

En la ecuación del circuito LC, *u(t)* es equivalente a la posición x. *L* es equivalente a la masa *m* y $1/C$ es equivalente a la constante del muelle *k*:

Esta ecuación se denomina ecuación de onda y su resultado es el siguiente:

$$U = U_0 cos(\omega t + \phi)$$

con

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

U_0 y ϕ dependen de las condiciones iniciales.

Si se consideran las pérdidas en forma de resistencia en serie con L y C, la oscilación se va amortiguando y finalmente desaparece.

4.10 Equivalente Thevenin de un circuito

El teorema de Thévenin establece que si una parte de un circuito eléctrico lineal está comprendida entre dos terminales A y B, esta parte en cuestión puede sustituirse por un circuito equivalente que esté constituido únicamente por un generador de tensión (V_{th}) en serie con una impedancia (Z_{th}), de forma que al conectar un elemento entre las dos terminales A y B, la tensión que cae en él y la intensidad que lo atraviesa son las mismas tanto en el circuito real como en el equivalente.

En la siguiente figura se muestra el caso de un circuito en continua formado únicamente por resistencias, en cuyo caso, el equivalente estará formado por una fuente de tensión y una resistencia equivalente.

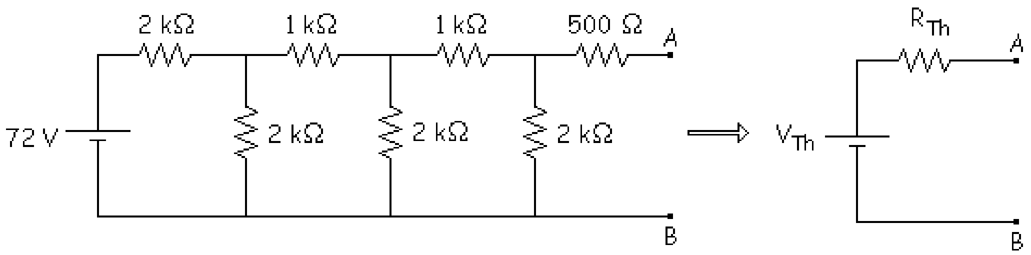


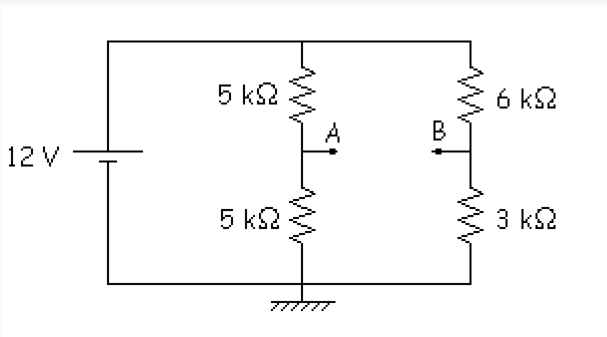
Figura 4. 49. Equivalente Thevenin de un circuito.

El procedimiento es el siguiente:

1. Calcular la tensión entre los dos puntos A y B, dicha tensión será V_{th}.
2. Eliminar las fuentes de tensión y corriente del circuito: cortocircuitar las fuentes de tensión independientes y abrir las fuentes de corriente independientes. A continuación, calcular la resistencia entre los puntos A y B, cuyo valor será R_{th}.

Ejemplo 4.14.

Calcular el equivalente Thevenin entre A y B del siguiente circuito. Si conectamos entre A y B una resistencia de 2 kΩ, calcular la tensión en bornes de dicha resistencia y la corriente que la atravesará.



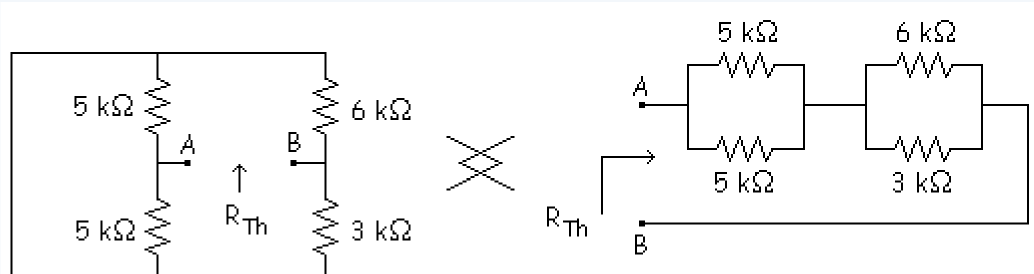
1º calculamos la tensión entre los puntos A y B. Para ello, calculamos la tensión en el punto A (respecto del nudo de referencia) y la tensión en el punto B (también respecto del nudo de referencia).

$$V_A = \frac{12}{5+5} \cdot 5 = 6\ V$$

$$V_B = \frac{12}{6+3} \cdot 3 = 4\ V$$

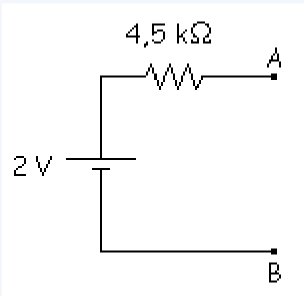
$$V_{Th} = V_{AB} = V_A - V_B = 6 + 4 = 2\ V$$

2º Eliminamos la fuente de tensión cortocircuitándola, y calculamos la resistencia entre A y B:

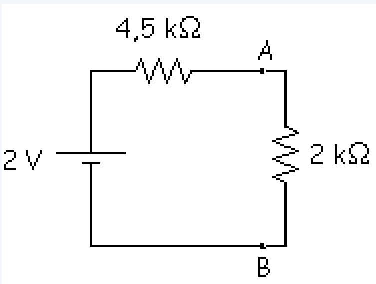


$$R_{Th} = (5\ //\ 5) + (6\ //\ 3) = 4{,}5\ k\Omega$$

El equivalente Thevenin entre A y B es:



Si entre A y B conectamos una resistencia de 2 kΩ, resolvemos el circuito:



$$I = \frac{V}{R_{total}} = \frac{2}{4500 + 2000} = 0{,}000307\ A = 0{,}307\ mA = 307\ \mu A$$

$$V_{AB} = 2 \cdot \frac{2000}{4500 + 2000} = 2 \cdot \frac{2}{4{,}5 + 2} = 0{,}615\ V$$