

TEST 6: NUMERABILIDAD Y SEPARACIÓN

Si un espacio es T_1 y separable es T_2 .

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Considera espacio topológico donde hay una familia no numerable de abiertos disjuntos dos a dos. Entonces el espacio no puede ser IIAN.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Sierpinski es un contraejemplo.

La respuesta correcta es 'Falso'

Si $\mathcal{F}$ es la familia del enunciado, y $\mathbb{B}$ es base. Entonces, para cada $U \in \mathcal{F}$ existe $B_U \in \mathbb{B}$ tal que $B_U \subseteq U$. Como los elementos de la familia son disjuntos dos a dos los abiertos básicos correspondientes son distintos. Es decir, la aplicación $U \mapsto B_U$ es inyectiva.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Si en una topología cualquier conjunto finito de puntos es cerrado, entonces es Hausdorff.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

La topología cofinita sobre un conjunto infinito tiene como cerrados no triviales los conjuntos finitos de puntos, pero no es Hausdorff.

La respuesta correcta es 'Falso'

El cociente de un espacio T_2 es T_2 .

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Considera $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

La respuesta correcta es 'Falso'

Considera un conjunto X no contable con la topología cofinita. Este espacio es primero numerable.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Hay que razonar por reducción al absurdo. Sea $x \in X$ y sea $\mathcal{B}^x$ una base de entornos contable. El complementario de cada entorno básico es finito. La unión de todos ellos es contable. Por lo tanto existe $y \in X$ que pertenece a todo elemento de $\mathcal{B}^x$. Entonces $X \setminus \{y\}$ es entorno de x y no contiene ningún entorno básico.

La respuesta correcta es 'Falso'

El cociente de un espacio T_1 es siempre T_0 .

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es un contraejemplo.

La respuesta correcta es 'Falso'

Considera un conjunto X contable con la topología cofinita. Este espacio es segundo numerable.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Basta observar, en esta situación, que la topología cofinita tiene una cantidad contable de abiertos.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Cualquier subespacio de un espacio separable es separable.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

El plano de Moore es un contraejemplo a esa afirmación.

La respuesta correcta es 'Falso'

Considera el plano con la topología dada por la subbase $\{\mathbb{R} \times \{y\} \mid y \in [0, 1]\}$. Este espacio es IAN.

☒ Verdadero ❌

☐ Falso

Ser IAN es hereditario.

☐ Verdadero

☒ Falso ❌

Sea $\mathbb{B}$ una base. Para todo $y \in [0, 1]$ hay un básico $B_y \subseteq \mathbb{R} \times \{y\}$. Entonces la aplicación $y \mapsto B_y$ es inyectiva. La respuesta correcta es 'Falso'

Basta intersecar los abiertos básicos con el subespacio para obtener una base de este. La respuesta correcta es 'Verdadero'

Ser IAN es hereditario.

☐ Verdadero

☒ Falso ❌

Si tengo dos topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Si $\mathcal{T}$ es T_2 , entonces $\mathcal{T}'$ también lo es.

☐ Verdadero

☒ Falso ❌

Basta intersecar los entornos básicos con el subespacio para obtener una base de entornos en este. La respuesta correcta es 'Verdadero'

Si existen $\mathcal{T}$ -abiertos que separan puntos, esos mismos abiertos son $\mathcal{T}'$ -abiertos. La respuesta correcta es 'Verdadero'

Cualquier subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff.

☐ Verdadero

☒ Falso ❌

Considera el plano con la topología dada por la subbase $\{\mathbb{R} \times \{y\} \mid y \in [0, 1]\}$. Este espacio es IAN.

☐ Verdadero

☒ Falso ❌

Por supuesto. Basta separarlos en el espacio grande y tomar los abiertos relativos asociados. La respuesta correcta es 'Verdadero'

Cada punto tiene una base de entornos con un único elemento. La respuesta correcta es 'Verdadero'

Considera un conjunto X contable con la topología cofinita. Este espacio es primero numerable.

☐ Verdadero

☒ Falso ❌

Basta observar, en esta situación, que la topología cofinita tiene una cantidad contable de abiertos. Los abiertos que contienen a un punto son una base contable de entornos. La respuesta correcta es 'Verdadero'

Sea X un espacio topológico primero numerable. Dado $x \in X$ existe una base contable de entornos $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ tal que $B_i \supset B_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

☒ Verdadero ✔️

☐ Falso

Bien

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Sea X un espacio topológico. Dado $x \in X$ existe una base contable de entornos $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ tal que $B_i \supset B_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Para eso debería ser IAN. Que no quiere decir que no haya espacios no IAN y que exista algún punto para el que si haya una base semejante.
La respuesta correcta es 'Falso'

En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, el conjunto $A := B_{\delta_n}((\pi, e); \sqrt{2}/2)$ se puede expresar como la unión numerable de bolas euclídeas centradas en puntos de $\mathbb{Q}^2$ y radios en la familia $\{1/n \mid \mathbb{N}\}$.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Sabemos que $\mathbb{R}^2$ con la topología usual es IAN con base numerable dada por bolas euclídeas centradas en puntos de $\mathbb{Q}^2$ y radios en la familia $\{1/n \mid \mathbb{N}\}$. Al ser A un abierto métrico, por definición de base de abiertos, existe una colección numerable de elementos de de este tipo cuya unión (numerable) es A .
La respuesta correcta es 'Verdadero'

La separabilidad es una propiedad topológica

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

tanto el cardinal como la densidad son propiedades que se respetan por homeomorfismos.
La respuesta correcta es 'Verdadero'

Un espacio métrico es segundo numerable.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

La discreta en $\mathbb{R}$ es un contraejemplo.
La respuesta correcta es 'Falso'

El producto de un espacio T_1 por otro T_2 es T_2 .

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Toma un espacio T_1 y lo multiplicas por $\{0\}$.
La respuesta correcta es 'Falso'

Todo espacio primero numerable y Hausdorff es segundo numerable.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

La discreta en $\mathbb{R}$ es un contraejemplo.
La respuesta correcta es 'Falso'

Ser T_2 es una propiedad topológica.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

En efecto lo es. Se preserva por homeomorfismos de manera obvia.
La respuesta correcta es 'Verdadero'

Considera el plano con la topología dada por la subbase $\{\mathbb{R} \times \{y\} \mid y \in [0, 1]\}$. Este espacio es separable.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Si D es denso, $\mathbb{R} \times \{y\} \cap D \neq \emptyset$ para todo $y \in [0, 1]$. Los elementos de la base son dos a dos disjuntos el cardinal de D es al menos el de la base.
La respuesta correcta es 'Falso'

Considera un conjunto X no contable con la topología cofinita. Este espacio es segundo numerable.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Hay que razonar por reducción al absurdo. Sea $\mathcal{B}$ una base de abiertos contable. El complementario de cada abierto básico es finito. La unión de todos ellos es contable. Por lo tanto existe $y \in X$ que pertenece a todo abierto de $\mathcal{B}$. Entonces $X \setminus \{y\}$ es abierto en X y no contiene ningún abierto básico.
La respuesta correcta es 'Falso'

TEST 7: PRODUCTOS Y COCIENTES

Sea X el espacio discreto de dos puntos. La suspensión de X es homeomorfa a una circunferencia.

- ☐ Verdadero
☒ Falso ✖

El cilindro son dos segmentos disjuntos. Al identificar los extremos, forman una circunferencia.
La respuesta correcta es 'Verdadero'

Sea X el espacio discreto de dos puntos. El cilindro de X es homeomorfo a X .

- ☒ Verdadero ✖
☐ Falso

El cilindro son dos segmentos disjuntos.
La respuesta correcta es 'Falso'

Sea X un espacio topológico, y $\mathcal{R}_1$ una relación de equivalencia en X . Sea $\mathcal{R}_2$ una relación de equivalencia en $X/\mathcal{R}_1$. Entonces $(X/\mathcal{R}_1)/\mathcal{R}_2$ es homeomorfo al cociente de X por una relación de equivalencia $\mathcal{R}_3$.

- ☐ Verdadero
☒ Falso ✖

Ser homeomorfo a un cociente depende de la existencia de identificaciones; y la composición de identificaciones es identificación.
La respuesta correcta es 'Verdadero'

Sean X, Y espacios topológicos no vacíos y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X , entonces $X/\mathcal{R} \times Y$ es homeomorfo a un cociente de $X \times Y$.

- ☐ Verdadero
☒ Falso ✖

La relación es la relación es $(x, y) \cong (x', y') \iff x\mathcal{R}x' \wedge x = y$.
La respuesta correcta es 'Verdadero'

Sean X, Y espacios topológicos no vacíos, y P una propiedad topológica hereditaria. Si $X \times Y$ cumple la propiedad P , entonces también la cumplen X e Y .

- ☐ Verdadero
☒ Falso ✖

Dado $y \in Y$, $X \times \{y\}$ es un subespacio de $X \times Y$ homeomorfo a X .
La respuesta correcta es 'Verdadero'

La suspensión de S^1 es homeomorfa a S^2 .

- ☐ Verdadero
☒ Falso ✖

Cada tapa del cilindro se identifica a uno de los polos.
La respuesta correcta es 'Verdadero'

El cilindro de S^1 es homeomorfo a S^2 .

- ☒ Verdadero ✖
☐ Falso

La suspensión sí lo es, pero el cilindro no.
La respuesta correcta es 'Falso'

Sea X el espacio discreto de dos puntos. El cono de X es homeomorfo a $[0, 1]$.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

El cilindro son dos segmentos disjuntos. Si pegamos un extremo de uno con un extremo del otro, obtenemos de nuevo un segmento.
La respuesta correcta es 'Verdadero'

Sean X e Y espacios topológicos, y CX y CY sus respectivos cilindros. Entonces $CX \times CY$ es homeomorfo al cilindro de $X \times Y$.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

$(I \times X) \times (I \times Y)$ no es homeomorfo a $I \times (X \times Y)$.

La respuesta correcta es 'Falso'

El cono sobre S^1 es homeomorfo al disco D^2 .

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

La proyección del cono usual sobre su base es un homeomorfismo.
La respuesta correcta es 'Verdadero'

Sean X, Y espacios topológicos no vacíos. Entonces X es homeomorfo a un cociente de $X \times Y$.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

La proyección cumple la definición de una identificación. La relación es $(x, y) \cong (x', y') \iff x = x'$.
La respuesta correcta es 'Verdadero'

Sea X el espacio discreto de dos puntos. El cono de X es homeomorfo a X .

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

El cilindro son dos segmentos disjuntos. Si pegamos un extremo de uno con un extremo del otro, obtenemos de nuevo un segmento.
La respuesta correcta es 'Falso'

El cilindro sobre S^1 es homeomorfo al disco D^2 .

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

El cono sí lo es, pero el cilindro no.
La respuesta correcta es 'Falso'

TEST 8: COMPACIDAD

La compacidad es una propiedad topológica.

- ☐ Verdadero
☒ Falso ❌

Con la topología usual sobre el plano, $[0, 1] \times [2, 3]$ es compacto.

- ☒ Verdadero ❌
☐ Falso

Sí. Los homeomorfismos preservan los cubrimientos abiertos.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

No es cerrado

La respuesta correcta es 'Falso'

Sea A un subconjunto compacto de un métrico X . Entonces $\bigcup_{a \in A} \overline{D}(a, \varepsilon)$ es cerrado para todo $\varepsilon > 0$.

- ☐ Verdadero
☒ Falso ❌

Se puede probar que $d_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ es continua. Entonces $\bigcup_{a \in A} \overline{D}(a, \varepsilon) = d_A^{-1}([0, \varepsilon])$ ha de ser cerrado por continuidad.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Sea C_n una sucesión decreciente de cerrados encajados de un espacio métrico X y sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua sobre un espacio compacto. Entonces $f(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(C_n)$.

- ☒ Verdadero ❌
☐ Falso

Sean $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow e^{2\pi i x} \in \mathbb{S}^1$ y $C_n = [n, \infty)$. Entonces $\bigcap_n C_n = \emptyset$ pero $f(C_n) = \mathbb{S}^1$.

La respuesta correcta es 'Falso'

Sea X e Y dos espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre ellos. Si $K \subset Y$ es un compacto entonces $f^{-1}(K)$ compacto.

- ☒ Verdadero ❌
☐ Falso

Basta considerar $f : \mathbb{R} \rightarrow Y = \{0\}$. Y es compacto pero $f^{-1}(0) = \mathbb{R}$ no es compacto.

La respuesta correcta es 'Falso'

Sean $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ dos topologías sobre un mismo conjunto X . Si $(X, \mathcal{T}')$ es compacto entonces $(X, \mathcal{T})$ es compacto.

- ☐ Verdadero
☒ Falso ❌

En efecto, es cierto. Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento por $\mathcal{T}$ -abiertos, también son $\mathcal{T}'$ -abiertos por lo tanto podemos encontrar el subcubrimiento finito.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Con la topología usual sobre los reales, $\mathbb{Q}$ es compacto.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

No es cerrado ni acotado

La respuesta correcta es 'Falso'

La imagen continua de un espacio localmente compacto es localmente compacta.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Toma $\mathbb{R}$ con la topología discreta y la indiscreta y toma la identidad entre ellos (de la discreta a la indiscreta)

La respuesta correcta es 'Verdadero'

La compactificación de Alexandrov de $[0, 1)$ es homeomorfa a la circunferencia S^1 .

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Su compactificación es homeomorfa a $[0, 1]$.

La respuesta correcta es 'Falso'

La compacidad local es una propiedad topológica.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Sí. Los homeomorfismos preservan las bases y la compacidad.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Con la topología usual sobre el plano, $\mathbb{D}((0, 0), 1)$ es compacto.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Es cerrado y acotado

La respuesta correcta es 'Verdadero'

La compactificación de Alexandrov de $(0, 1) \cup (1, 2)$ es homeomorfa a la curva del ocho, i.e., dos circunferencias tangentes.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Sí. Si al ocho le quitas el punto central, te quedan dos intervalos abiertos.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Sea $K \subset X$. Es obvio que $\{X\}$ es un cubrimiento abierto y tiene un subcubrimiento finito, luego K es compacto.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Ese argumento solo considera un cubrimiento, no todos los posibles.

La respuesta correcta es 'Falso'

La compactificación de Alexandrov de $(0, 1) \cup (1, 2)$ es homeomorfa a $[0, 2]$.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Su compactificación es un ocho (lemniscata).

La respuesta correcta es 'Falso'

La compactificación de Alexandrov de $(0, 1)$ es homeomorfa a la circunferencia S^1 .

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Si quitas un punto a S^1 , tienes un espacio homeomorfo a $(0, 1)$.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Con la topología usual sobre los reales, $[0, 1]$ es compacto.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Es cerrado y acotado

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Sea X un espacio topológico y $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de X . Entonces $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

- ☐ Verdadero
☒ Falso ✖

Es por definición. Si en cambio pensamos en un cubrimiento $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de K por abierto de un espacio topológico X tenemos un solo contenido $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

$\emptyset$ es compacto.

- ☐ Verdadero
☒ Falso ✖

Basta tomar el subrecubrimiento $\emptyset$.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Con la topología usual sobre el plano, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es compacto.

- ☒ Verdadero ✖
☐ Falso

No es acotado

La respuesta correcta es 'Falso'

La compacidad secuencial es una propiedad topológica.

- ☐ Verdadero
☒ Falso ✖

Sí. Los homomorfismos preservan las sucesiones convergentes.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

La compactificación de Alexandrov de $[0, 1) \cup (1, 2)$ es homeomorfa a la curva del ocho, i.e., dos circunferencias tangentes.

- ☒ Verdadero ✖
☐ Falso

No, su compactificación es un como la figura de un 6.

La respuesta correcta es 'Falso'

La compactificación de Alexandrov de $[0, 1) \cup [2, 3)$ es homeomorfa a $[0, 1]$.

- ☐ Verdadero
☒ Falso ✖

Sí, si quitas $\frac{1}{2}$ a $[0, 1]$ te quedan dos intervalos semiabiertos.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Las bolas cerradas de radio unidad en un espacio métrico son siempre compactas.

- ☒ Verdadero ✖
☐ Falso

Basta pensar en $(0, 1)$.

La respuesta correcta es 'Falso'

La compactificación de Alexandrov de la bola abierta $\mathbb{B}((0, 0), 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ es homeomorfa al disco $\mathbb{D}((0, 0), 1) \subseteq \mathbb{R}^2$

- ☒ Verdadero ✖
☐ Falso

Es homomorfa a la esfera de dimensión 2.

La respuesta correcta es 'Falso'

Sean $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ dos topologías sobre un mismo conjunto X . Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto entonces $(X, \mathcal{T}')$ es compacto.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

$\{\emptyset, \mathbb{R}\} \subset \mathcal{T}_u$ sobre $\mathbb{R}$. Los espacios indiscretos son compactos, pero los reales con la topología usual no.

La respuesta correcta es 'Falso'

Con la topología usual sobre los reales, $[0, \infty)$ es compacto.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

No es acotado

La respuesta correcta es 'Falso'

La compactificación de Alexandrov de $[0, 1)$ es homeomorfa a $[1, 2]$.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Si le quito el punto 2 a $[1, 2]$ tengo un intervalo homeomorfo a $[0, 1)$.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

La compactificación de Alexandrov de $\mathbb{R}^2$ es homeomorfa a la esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

La proyección estereográfica te da la solución.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

La compactificación de Alexandrov de $(0, 1)$ es homeomorfa a $[0, 1]$.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Su compactificación es homeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

La respuesta correcta es 'Falso'

Con la topología usual sobre los reales, $[0, 1)$ es compacto.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

No es cerrado

La respuesta correcta es 'Falso'

Con la topología usual sobre los reales, $\mathbb{Z}$ es compacto.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

No es acotado

La respuesta correcta es 'Falso'

En cualquier espacio topológico X la intersección contable de una familia decreciente y encajada de cerrados no vacíos es no vacía.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty) = \emptyset$.

La respuesta correcta es 'Falso'

La clausura de un compacto es compacta.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

Considera $\mathbb{N}$ con la topología dada por los subconjuntos que contienen al 0. $\{0\}$ es un contraejemplo.

La respuesta correcta es 'Falso'

En un espacio topológico, un conjunto compacto es un conjunto cerrado y acotado.

- ☒ Verdadero ✖
- ☐ Falso

En un espacio topológico no tiene sentido el concepto de acotación. Más aún, los compactos no son, en general, cerrados. Eso solo lo podemos asegurar en el caso Hausdorff.

La respuesta correcta es 'Falso'

Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua, donde X es compacto. Entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \geq f(y)$ para cada $y \in X$.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

La imagen $K = f(X)$ es compacta, luego cerrada y acotada en $\mathbb{R}$. Dado que K es cerrado y acotado, $c = \sup K \in K$. Cualquier punto de $f^{-1}(c)$ cumple los requisitos.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Con la topología usual sobre los reales, $\{0\}$ es compacto.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Es cerrado y acotado

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Con la topología usual sobre el plano, $[0, 1] \times [2, 3]$ es compacto.

- ☐ Verdadero
- ☒ Falso ✖

Es cerrado y acotado

La respuesta correcta es 'Verdadero'