UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS 13 de septiembre de 2022

Geometría de Curvas y Superficies

Segundo Parcial

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta. Razona todas las respuestas.
- La nota de los apartados b) y c) de cada problema es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo asociado a la pregunta correspondiente.
- Si P_N^n es la nota del apartado [**N**]n), la nota global se calcula con la siguiente fórmula:

$$\frac{3(P_1+P_2)+4P_3}{10}, \quad P_N = \frac{P_N^a+P_N^b+P_N^c}{3}.$$

[1] (a) Sean S una superficie regular, y sean $\mathbf{x}:U\to S$, $\mathbf{y}:V\to S$ dos cartas. Para simplificar, supondremos que $\mathbf{x}(U)=\mathbf{y}(V)$, abierto de S.

(i) Considera el cambio de cartas $\mathbf{z}:=\mathbf{y}^{-1}\circ\mathbf{x}$. Descríbelo y relaciónalo con las bases de campos coordenados.

(ii) Sean $\mathbf{I}_{\mathbf{x}}:U\to\mathrm{Mat}(2;\mathbb{R})$, $\mathbf{I}_{\mathbf{y}}:U\to\mathrm{Mat}(2;\mathbb{R})$ las matrices que determinan la primera forma fundamental. Usa el cambio de cartas para relacionarlas.

(iii) Sea $X:U\to\mathbb{R}^2$ un campo $\mathcal{C}^\infty$. Construye $Y:=\mathrm{d}\mathbf{z}(X):V\to\mathbb{R}^2$. Demuestra que $\forall(u,v)\in U$, se tiene que $\mathrm{d}\mathbf{x}_{(u,v)}(X(u,v))=\mathrm{d}\mathbf{y}_{\mathbf{z}(u,v)}(Y(\mathbf{z}(u,v)))$ y úsalo para demostrar que si $\boldsymbol{\gamma}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ es una curva integral de X tal que $\boldsymbol{\gamma}(0)=(u_0,v_0)\in U$ y $\boldsymbol{\delta}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to V$ es una curva integral de $\mathrm{d}\mathbf{z}(X)$ tal que $\boldsymbol{\delta}(0)=\mathbf{z}(u_0,v_0)\in V$, entonces, las imágenes de las curvas $\mathbf{x}\circ\boldsymbol{\gamma}$ e $\mathbf{y}\circ\boldsymbol{\delta}$ coinciden.

(iv) Consideremos $S=\mathbb{S}^2$, $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{y}$) es la inversa de la proyección estereográfica desde el polo norte (resp. polo sur). Encuentra dominios maximales de las cartas para que se cumpla la condición de la igualdad de las imágenes y calcula $\mathbf{z}$.

(b) Sea S una superficie orientada (es decir, orientable y con una orientación fija). Como también es bilateral, fijamos el campo vectorial unitario $\mathbf{N}:S\to\mathbb{S}^2$ tal que $\forall\mathbf{p}\in S$ si $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ es una base positiva de $T_{\mathbf{p}}S$ entonces $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{N}(\mathbf{p}))$ es una base positiva de $\mathbb{R}^3$.

(i) Sea $\mathbf{x}:U\to S$ una carta de S. Calcula $\mathbf{N}\circ\mathbf{x}$ y justifica que $\mathbf{N}$ es $\mathcal{C}^\infty$ y que $\forall\mathbf{p}\in S$ se tiene que $\mathrm{d}\mathbf{N}_{\mathbf{p}}$ es un endomorfismo.

(ii) Sea $\mathbf{p}\in S$ tal que $\mathrm{d}\mathbf{N}_{\mathbf{p}}$ es biyectiva. Demuestra que existen entornos abiertos V, de $\mathbf{p}$ en S, y W, de $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ en $\mathbb{S}^2$, tales que $\mathbf{N}_|:V\to W$ es un difeomorfismo.

(iii) Sea $R\subset V$ una región elemental. ¿Por qué es $\mathbf{N}(R)$ también una región elemental?

(iv) Relaciona el área de $\mathbf{N}(R)$ con $\det\mathrm{d}\mathbf{N}_{\mathbf{p}}$ (¿hemos llamado de otra manera a este determinante?).

(c) Se considera la aplicación $\mathbf{x}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$, dada por $\mathbf{x}(u,v):=(u\cos v, u\operatorname{sen} v, 3\operatorname{sen} v)$. Sea S la imagen de la aplicación.

(i) Comprueba si S es superficie regular; si no lo es, determina los puntos $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ para los que $\operatorname{Jac}\mathbf{x}(u,v)$ no es de rango 2.

(ii) Da una parametrización de la curva intersección de la imagen de la carta con la esfera E de ecuación $x^2+y^2+z^2-6y=0$.

(iii) Prueba que a lo largo de dicha curva, E y S tienen el mismo plano tangente (en los puntos en los que S es superficie regular).

[2] (a) Sea S una superficie regular.

(i) Define el concepto de campo de direcciones de S.

(ii) Sea $\mathcal{D}$ un campo de direcciones en $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea $\mathbf{x} : U \to S$ carta. Usa el concepto de $\mathrm{d}\mathbf{x}$ de un campo de $U \subset \mathbb{R}^2$ para definir $\mathrm{d}\mathbf{x}(\mathcal{D})$ como campo de direcciones en $\mathbf{x}(U) \subset S$.

(iii) Enuncia el resultado que garantiza que si dos campos de direcciones en $U \subset \mathbb{R}^2$, abierto, engendran $\mathbb{R}^2$ en todo punto, entonces existe un difeomorfismo tal que en un entorno de cada punto de U existe un difeomorfismo que lleva dichos campos a los campos de direcciones vertical y horizontal. Usa esto para demostrar que para cada punto de S existe una carta que contiene al punto para la que las curvas coordenadas son siempre ortogonales.

(iv) Define curva integral a un campo de direcciones de S.

(v) Sea $\mathbf{x} : U \to S$ una carta tal que en $\mathbf{x}(U)$ donde todos los puntos son hiperbólicos. Demuestra la existencia de dos campos de direcciones $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ en $\mathbf{x}(U)$ tales que sus curvas integrales son todas las líneas asintóticas en $\mathbf{x}(U)$.

(b) Resuelve las siguientes cuestiones:

(i) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y dado $c > 0$, considera la aplicación $F_c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F_c(\mathbf{p}) := c\,\mathbf{p}$. Determina las curvaturas principales, media y de Gauss de $F_c(S)$ en función de las de S.

(ii) Sea $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \to S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada de revolución que define una superficie regular S, partiendo de una curva $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ regular (no necesariamente parametrizada por el arco) $\boldsymbol{\gamma}(t) := (x(t), y(t))$, $x > 0$. Encuentra las condiciones para que un punto sea umbílico. ¿Hay puntos umbílicos aislados?

(c) Sea $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 - 1, z > 0\}$, superficie regular.

(i) Demuestra que $(0, 0, 0)$ es un punto umbílico y encuentra las líneas de curvatura que pasan por él.

(ii) Calcula la curvatura de Gauss $K : S \to \mathbb{R}$. Calcula sus puntos críticos, si está acotada y su comportamiento en el *infinito*.

(iii) Calcula $\mathbf{N}(S) \subset \mathbb{S}^2$.

[3] (a) Sea S una superficie regular, tal que la aplicación $\mathbf{x} : U \to S$ es una superficie parametrizada.

(i) Define el concepto de campo $X : U \to \mathbb{R}^3$ campo a lo largo de $\mathbf{x}$.

(ii) Define las derivadas covariantes parciales de un campo a lo largo de $\mathbf{x}$.

(iii) Define los símbolos de Christoffel y demuestra que son $\mathcal{C}^\infty$.

(iv) Calcula los símbolos de Christoffel cuando en la primera forma fundamental de $\mathbf{x}$ se tiene $E = 1$, $F = 0$ y $G(u, v) = R(u)^2$ (es decir, G no depende de v).

(b) Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ una curva parametrizada por el arco, homeomorfismo sobre la imagen y tal que $x(t) > 0$. Sea S la superficie de revolución que engendra, con la aplicación $\mathbf{x}$ habitual.

(i) Determina los símbolos de Christoffel para $\mathbf{x}$ y las ecuaciones que debe de satisfacer una geodésica $\boldsymbol{\delta} : J \to S$, tal que $\boldsymbol{\delta}(t) := \mathbf{x}(u(t), v(t))$, con $u, v : J \to \mathbb{R}$ funciones $\mathcal{C}^\infty$ tales que $(u(t), v(t)) \in U$ y $u'(t)v'(t) \neq 0$.

(ii) Sea $\theta : J \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$ que mide el ángulo de $\boldsymbol{\delta}'(t)$ y $\mathbf{x}_v(u(t), v(t))$. Demuestra que $x \cos\theta$ es constante.

(iii) Demuestra que aunque $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ no estén parametrizadas por el arco, la curva $\boldsymbol{\delta}(t) := \mathbf{x}(t, w(t))$, con

$$w'(t) = \frac{C\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{x(t)\sqrt{x(t)^2 - C}}, \quad C \text{ constante},$$

es geodésica reparametrizada.

(c) (i) Sean S una superficie regular, $\Phi : S \to S$ una isometría, $\boldsymbol{\gamma} : I \to S$ una curva regular parametrizada por el arco y $V \subset S$ abierto tal que $\boldsymbol{\gamma}(I) = \{\mathbf{p} \in V \mid \Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\}$. Demuestra que $\boldsymbol{\gamma}(t)$ es una geodésica.

(ii) Sea S la superficie de ecuación $x^2+2y^2 = 1+z^2$. Encuentra cuatro geodésicas reparametrizadas de S (con imágenes distintas) que pasen por $(1, 0, 0)$.

(iii) Sea S la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ y sea $\mathbf{p} := (1, 1, 1) \in S$. Encuentra un vector unitario horizontal $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{p}}S$. Usa la relación de Clairaut para describir la forma que tendrá la geodésica $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to S$ tal que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{p}$ y $\boldsymbol{\gamma}'(0) = \mathbf{u}$.