UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA — Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS — 9 de septiembre de 2021

Geometría de Curvas y Superficies

Segundo Parcial

- *Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta. Razona todas las respuestas.*
- *Cada apartado se puntúa sobre 10.*
- *La nota de los apartados b) y c) de cada problema es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo asociado a la pregunta correspondiente.*
- *Si P_N^n es la nota del apartado* **[N]**n), *la nota global se calcula con la siguiente fórmula:*

$$\frac{3(P_1+P_2)+4P_3}{10}, \quad P_N = \frac{P_N^a+P_N^b+P_N^c}{3}.$$

[1] (a) Sea S una superficie regular.

(i) Define región plana, región elemental de S y región de S. Da un ejemplo de una región de una superficie que no sea una región elemental.

(ii) Define el área de una región elemental y demuestra que la fórmula no depende de la carta elegida.

(iii) Supongamos que S admite una carta $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to S$ tal que la primera forma fundamental es $(1+v^2)I_2$. Calcula el área de la región elemental $\mathbf{x}\left([-1,1]^2\right)$.

(b) Sea S una superficie orientada (es decir, orientable y con una orientación fija)y sea $\mathbf{N} : S \to \mathbb{S}^2$ el campo vectorial unitario tal que $\forall \mathbf{p} \in S$ si $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ es una base positiva de $T_\mathbf{p}S$ entonces $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{N}(\mathbf{p}))$ es una base positiva de $\mathbb{R}^3$.

(i) Sea $\mathbf{x} : U \to S$ una carta de S. Calcula $\mathbf{N} \circ \mathbf{x}$.

(ii) Demuestra que $\mathbf{N}$ es una aplicación diferenciable entre superficies regulares.

(iii) Justifica que $\forall \mathbf{p} \in S$ se tiene que $\mathrm{d}\mathbf{N}_\mathbf{p}$ es un endomorfismo.

(iv) Encuentra superficies S y puntos $\mathbf{p} \in S$ tales que

a) $\mathrm{d}\,\mathbf{N}_\mathbf{p}$ es nula.

b) $\mathrm{d}\,\mathbf{N}_\mathbf{p}$ es de rango 1.

c) $\det \mathrm{d}\,\mathbf{N}_\mathbf{p} > 0$.

d) $\det \mathrm{d}\,\mathbf{N}_\mathbf{p} < 0$.

(c) Demuestra que las siguientes parejas de superficies regulares de $\mathbb{R}^3$ son difeomorfas:

(i) El plano $z = 0$ y el paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$.

(ii) El hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(iii) Un cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$ y una esfera sin los polos. ¿Son difeomorfas ambiente?

[2] (a) Sea S una superficie regular.

(i) Define puntos hiperbólicos y elípticos y señala qué tienen en común con respecto a la aplicación de Gauss.

(ii) Sea $\mathbf{x} : U \to S$ una carta tal que en $\mathbf{x}(U)$ solo hay puntos hiperbólicos. Describe la ecuación diferencial que satisfacen las líneas asintóticas.

(iii) Define campo de direcciones en una superficie y demuestra que en $\mathbf{x}(U)$ hay dos campos de direcciones asintóticas.

(b) Resuelve las siguientes cuestiones:

(i) Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to S$ una curva regular que no pasa por ningún punto planar ni parabólico. Demuestra que $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\gamma}} := \mathbf{N} \circ \boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{S}^2$ también es regular. Demuestra que si además $\boldsymbol{\gamma}$ es una línea de curvatura de S entonces $\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(t) = |\mathbf{II}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t))|\, \kappa_{\mathbf{N}_{\boldsymbol{\gamma}}}(t)$.

(ii) Sea $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \to S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada de revolución que define una superficie regular S, partiendo de una curva $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ regular (no necesariamente parametrizada por el arco) $\boldsymbol{\gamma}(t) := (x(t), y(t))$, $x > 0$. Encuentra las condiciones para que un punto sea umbílico. ¿Hay puntos umbílicos aislados?

(iii) Construye una superficie de revolución a partir de una elipse de manera que tenga puntos umbílicos. ¿Cuántas líneas de curvatura pasan por sus puntos umbílicos?

(c) Sea $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$, superficie regular.

(i) Demuestra que $(0, 0, 0)$ es un punto umbílico y encuentra las líneas de curvatura que pasan por él.

(ii) Calcula la curvatura de Gauss $K : S \to \mathbb{R}$. Calcula sus puntos críticos, si está acotada y su comportamiento en el *infinito*.

[3] (a) Sea S una superficie de revolución, $\mathbf{p} \in S$.

(i) Expresa las ecuaciones de las geodésicas en términos de las cartas estándar de S.

(ii) Deduce el paso de las ecuaciones anteriores a la relación de Clairaut.

(iii) Reescribe la relación de Clairaut en términos de la resolución de una integral.

(b) Sea S una superficie regular completa, es decir, $\forall \mathbf{p} \in S$, la aplicación exponencial $\exp_{\mathbf{p}}$ está definida en $T_{\mathbf{p}}S$.

(i) Sea $\Phi : S \to S$ una isometría y sea $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to S$ una curva regular parametrizada por el arco tal que $\boldsymbol{\gamma}(\mathbb{R})$ es una componente conexa de $\{\mathbf{p} \in S \mid \Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\}$. Demuestra que $\boldsymbol{\gamma}$ es geodésica.

(ii) Sea S' otra superficie regular completa y sea $\psi : S \to S'$ una isometría local.

a) Demuestra que ψ es sobreyectiva.

b) Sea $\psi' : S \to S'$ otra isometría local. Supón que existe $\mathbf{p} \in S$ tal que $\psi(\mathbf{p}) = \psi'(\mathbf{p})$ y $\mathrm{d}\,\psi_{\mathbf{p}} = \mathrm{d}\,\psi'_{\mathbf{p}}$. Demuestra que $\psi = \psi'$.

(c) Sea S_1 el hiperboloide circular de una hoja de ecuación $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ y sea S_2 el hiperboloide elíptico de una hoja de ecuación $x^2 + 2y^2 = z^2 + 1$

(i) Encuentra cuatro geodésicas reparametrizadas de S_1 (con imágenes distintas) que pasen por $(1, 0, 0)$.

(ii) Encuentra cuatro geodésicas reparametrizadas de S_2 (con imágenes distintas) que pasen por $(1, 0, 0)$.

(iii) Sea $\mathbf{p} := (0, 2, \sqrt{3}) \in S_1$. Encuentra un vector unitario horizontal $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{p}}S_1$. Describe la forma que tendrá la geodésica $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to S_1$ tal que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{p}$ y $\boldsymbol{\gamma}'(0) = \mathbf{u}$.