UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA — Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS — 27 de mayo de 2024

Topología General - 2ª Parte

Empieza cada ejercicio en una hoja nueva y numéralas.
Pon tu nombre en **todas** las hojas.
Justifica razonadamente tus respuestas.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Demuéstralas o da un contraejemplo:

(a) Sean dos topologías $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ definidas en un mismo conjunto X, tales que $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}'$. Entonces, si $(X, \mathcal{T})$ es compacto, $(X, \mathcal{T}')$ también lo es.

Solución. Verdadero. Sea C un cubrimiento de X por abiertos de $\mathcal{T}'$. Como $\mathcal{T}$ es más fina, C también es un cubrimiento de X formado por abiertos de $\mathcal{T}$, y por lo tanto admite un subrecubrimiento finito (ya que $(X, \mathcal{T})$ es compacto).

(b) Sean dos topologías $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ definidas en un mismo conjunto X, tales que $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}'$. Entonces, si $(X, \mathcal{T})$ es conexo, $(X, \mathcal{T}')$ también lo es.

Solución. Verdadero. Si $(X, \mathcal{T}')$ no fuera conexo, existiría una desconexión (A, B) (es decir, dos abiertos de $\mathcal{T}'$ disjuntos no vacios que llenan el espacio). Como $\mathcal{T}$ es más fina, también serían abiertos de $\mathcal{T}$ y por lo tanto $(X, \mathcal{T})$ tendría una desconexión.

(c) En un espacio topológico X, las componentes conexas son abiertas.

Solución. Falso. En $\mathbb{Q}$ con la topología usual, las componentes conexas son los conjuntos unipuntuales, que no son abiertos.

(d) Todo espacio topológico no vacío tiene un subespacio que es compacto.

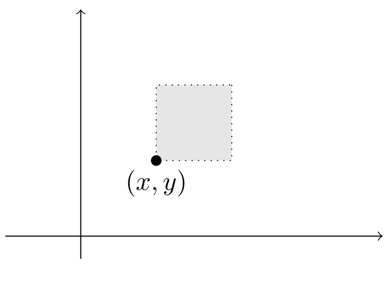
Solución. Verdadero. Por ejemplo, un conjunto unipuntual es un subespacio compacto.

(e) Una aplicación contínua de un espacio compacto a uno Hausdorff es cerrada.

Solución. Verdadero. Sea $f : X \to Y$ una aplicación contínua, siendo X compacto e Y Hausdorff. Sea $C \subseteq X$ cerrado. Por ser X compacto, C es compacto. Por ser f contínua, $f(C)$ es compacto. Por ser Y Hausdorff, $f(C)$ es cerrrado en Y.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Para cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y cada $\epsilon > 0$, definimos el conjunto

$$S^{\epsilon}_{x,y} := \big((x, x+\epsilon) \times (y, y+\epsilon)\big) \cup \{(x, y)\}.$$



Considera la topología $\mathcal{T}$ para la que la familia $\{S^{\epsilon}_{x,y} \mid x, y, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\}$ es una subbase.

1. ¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ compacto? Demuestra tu respuesta.

Solución. No es compacto. Por ejemplo, si tomamos el cubrimiento

$$\{S^1_{x,y} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Llena todo el plano. Pero si nos quedamos con un subconjunto finito

$$\{S^1_{x_1,y_1}, S^2_{x_2,y_2}, \ldots, S^n_{x_n,y_n}\},$$

el punto (x, y), donde $x = \text{mín}(x_1, \ldots, x_n) - 1$, $y = \text{mín}(y_1, \ldots, y_n) - 1$ no está cubierto por ninguno de ellos.

2. ¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ conexo? Demuestra tu respuesta.

   Solución. No es conexo. Es directo ver que $A = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ y $B = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ son disjuntos y llenan todo el plano. Para ver que son abiertos, veamos que son entornos de todos sus puntos.

   Sea $(x, y) \in A$, necesariamente $x \geq 0$, y $S^1_{x,y} \subseteq A$.

   Sea ahora $(x, y) \in B$. Es decir, $x < 0$; por lo tanto $S^{-x}_{x,y} \subseteq B$.

   Luego A y B forman una desconexión de este espacio.

3. Calcula las componentes conexas por caminos de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

   Solución. Sean $(x, y), (x', y')$ dos puntos distintos. Si $x \neq x'$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x < x'$. Una construcción análoga al ejercicio anterior (usando x' en lugar del 0) muestra que hay una desconexión que separa ambos puntos, luego no están en la misma componente conexa.

   Si $y \neq y'$, podemos de nuevo suponer $y < y'$ y hacer un razonamiento análogo, pero usando $A = \mathbb{R} \times [y', +\infty)$ y $B = \mathbb{R} \times (-\infty, y')$ que nos dice que tampoco están en la misma componente conexa.

   Por lo tanto, dos puntos distintos siempre están en distintas componentes conexas, así que las componentes conexas son unipuntuales. Como las componentes conexas por caminos están contenidas en las componentes conexas, también deben estar formadas por un único punto.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Sean X, Y dos espacios topológicos Hausdorff, compactos, conexos y con más de un punto. Sea $f : X \to Y$ una aplicación contínua. Definimos el espacio

$$D_f := X \times Y / \sim$$

donde

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \iff \left\{ \begin{array}{c} (x_0, y_0) = (x_1, y_1) \\ \text{o} \\ y_0 = f(x_0) \quad \text{y} \quad y_1 = f(x_1) \end{array} \right.$$

(es decir, el grafo de la función se identifica a un único punto).

1. Demuestra que si Y es conexo por caminos, D_f también lo es.

   Solución. Notar que para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\} \times Y$ con la topología heredada de $X \times Y$ es homeomorfo a Y. Como Y es conexo por caminos, cualquier punto de la forma (x, y) se puede unir por un camino a $(x, f(x))$. Componiendo con la aplicación cociente, tenemos un camino que une $[(x, y)]$ con $[(x, f(x))]$. Como todos los puntos de la forma $(x, f(y))$ corresponden al mismo punto en D_f, y acabamos de ver que este punto se puede unir con cualquier otro punto por un camino, el espacio D_f es conexo por caminos.

2. Demuestra D_f es compacto

   Solución. $X \times Y$ es compacto por ser producto de compactos. Y D_f es compacto por ser imagen contínua de $X \times Y$ (que es compacto).

3. Demuestra que $(X \times Y) \setminus \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ no es compacto.

   Solución. Como es el grafo de una función contínua en un espacio Hausdorff, $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ es un cerrado en $X \times Y$, y no es el total (por tener X más de un punto). Como $X \times Y$ es conexo, $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ no puede ser abierto.

   De nuevo, como $X \times Y$ es Hausdorff, si $(X \times Y) \setminus \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ fuera compacto, tendría que ser cerrado. Es decir, $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ tendría que ser abierto. Pero hemos visto en el párrafo anterior que no puede serlo.

4. Demuestra que $(X \times Y) \setminus \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ cumple el resto de las condiciones para tener compactificación de Alexandroff, y que ésta es homeomorfa a D_f.

   Solución. Como es un abierto en un localmente compacto, es localmente compacto.

   Como es subespacio de un Hausdorff, es Hausdorff.

   Por último, si a D_f le quitamos el punto $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, es fácil ver que es homeomorfo a $X \times Y \setminus \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. Así que D_f es un compacto tal que, al quitarle un punto, es homeomorfo a $X \times Y \setminus \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. Por lo tanto, es homeomorfo a su compactificación de Alexandroff.