

Geometría de Curvas y Superficies

Segundo parcial

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- Las tres preguntas tienen el mismo valor.
- Razona todas las respuestas.

[1] Sea S una superficie regular.

- a) Define las nociones de bilateralidad, orientabilidad y establece la relación entre ellas. Demuestra que un campo vectorial normal unitario es una aplicación diferenciable entre superficies.
- b) Supón que existe un campo vectorial normal unitario $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ y fíjalo.
- i) Indica la relación entre $\mathbf{N}$ y las curvaturas principales.
- ii) Supón que las curvaturas principales son siempre negativas (según la orientación determinada por $\mathbf{N}$). Prueba que

$$S_+ := \{\mathbf{p} + \mathbf{N}(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in S\}$$

es una superficie regular.

- iii) Demuestra que si una recta afín corta a S perpendicularmente, entonces también corta a S_+ perpendicularmente en algún punto.
- iv) Expresa las curvaturas media y de Gauss de S_+ en términos de las de S .
- v) Sea $\gamma : I \rightarrow S$ una línea de curvatura, y considera la curva

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{\mu} S_+ \\ t &\longmapsto \gamma(t) + \mathbf{N}(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Encuentra la relación de $\mathbf{t}_\mu(t)$ y $\mathbf{t}_\gamma(t)$.

- vi) Demuestra que μ también es línea de curvatura de S_+ .

[2] Sea S una superficie regular

- a) Caracteriza los conceptos de puntos elípticos, hiperbólicos, parabólicos y planares. Relaciónalos con la indicatriz de Dupin. Da ejemplos de todos esos tipos.
- b) Sea $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 - y^2 - z^2 + 1 = 0\}$.
 - i) Demuestra que S es una superficie regular.
 - ii) Encuentre una carta de S que cubra el punto $\mathbf{p} := (-1, 0, 0)$. Calcula la primera y segunda forma fundamental en $\mathbf{p}$ expresadas en esa carta.
 - iii) Considera el punto $\mathbf{q} := (0, 0, 1)$. Encuentra dos curvas diferentes $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ para algún $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma_i(0) = \mathbf{q}$ y $\gamma'_i(0)$ está en una dirección principal.
 - iv) Calcula las curvaturas media y de Gauss en $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.
 - v) Clasifica los puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ y encuentra las direcciones asintóticas en ellos si estas existen.

[3] Sea S una superficie regular.

- a) Dado $\mathbf{p} \in S$ define la aplicación exponencial $\exp_{\mathbf{p}}$ y explica cómo se usa para proporcionar coordenadas geodésicas normales y polares.
- b)
 - i) Demuestra que una curva en S parametrizada por el arco es una geodésica y una línea asintótica si y solo si es un segmento de recta parametrizado por el arco.

Consideremos la superficie de [2]b) con las notaciones que allí se introducen. Sea $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva dada por $\gamma(t) := (\sqrt[3]{t^2 - 1}, t)$ y sea

$$\begin{aligned} (-1, 1) &\xrightarrow{L} \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau. \end{aligned}$$

- ii) Demuestra que existe $a > 0$ tal que $L((-1, 1)) = (-a, a)$.
- iii) Sea $g : (-a, a) \rightarrow (-1, 1)$ la función inversa de L . ¿Es $\mathcal{C}^\infty$?
- iv) Encuentra infinitas geodésicas (tal vez reparametrizadas) que pasen por $\mathbf{p}$ (con imágenes distintas dos a dos).
- v) Encuentra dos geodésicas (tal vez reparametrizadas) que pasen por $\mathbf{q}$ (con imágenes distintas y no constantes).
- vi) Usa g para describir $\exp_{\mathbf{p}}$.