

Geometría de Curvas y Superficies

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- Las tres preguntas tienen el mismo valor y en algunas se puede obtener más de 10.
- Razona todas las respuestas.

[1] a) Sean S_1, S_2 dos superficies regulares de $\mathbb{R}^3$ y sean $F : S_1 \rightarrow S_2$ y $G : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos aplicaciones.

(i) Define las diferenciabilidades de F y G .

Supón que $G(S_1) \subset S_2$ y denota como $\tilde{G} : S_1 \rightarrow S_2$ la aplicación G en la que hemos cambiado el codominio. Asume que la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable.

(ii) Demuestra que G es diferenciable si y solo si lo es $\tilde{G}$.

b) Considera la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\mathbf{x}} \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u) \end{aligned}$$

Sea $\mathbb{T} := \mathbf{x}(\mathbb{R}^2)$.

(i) Demuestra que $\mathbf{x}$ es una superficie parametrizada.

Asume que la restricción de $\mathbf{x}$ a cualquier cuadrado abierto de lado 2π es un homeomorfismo sobre la imagen y que esta es abierta en $\mathbb{T}$.

(ii) Demuestra que $\mathbb{T}$ es una superficie regular.

(iii) Calcula la primera forma fundamental de $\mathbf{x}$.

(iv) Considera las curvas $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$, $i = 1, 2$, dadas por

$$\gamma_1(t) := \mathbf{x}(t, 0), \quad \gamma_2(t) := \mathbf{x}(t, 2t).$$

Demuestra que son periódicas y calcula sus periodos.

(v) Demuestra que las imágenes de las dos curvas se cortan en dos puntos. Calcula los ángulos entre las curvas en los puntos de corte.

[2] a) Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$.

i) Si S está orientada, define segunda forma fundamental y operador de Weingarten.

ii) ¿Qué efecto tiene cambiar la orientación? Es decir tomar como campo vectorial normal el opuesto del inicial.

iii) Dada $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$ curva diferenciable, define las curvaturas normal y geodésica de γ .

iv) Demuestra que si S no es orientable sí tiene sentido definir el valor absoluto de las curvaturas normal y geodésica.

b) Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada.

i) Define la segunda forma fundamental para $\mathbf{x}$.

ii) Sea $\delta : I \rightarrow U$ una curva diferenciable en el dominio de la superficie parametrizada y sea $\gamma := \delta \circ \mathbf{x}$. Define curvatura geodésica y curvatura normal para δ .

Asume que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\mathbf{x}} \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \left(\cos u \left(1 + v \cos \frac{u}{2} \right), \sin u \left(1 + v \cos \frac{u}{2} \right), v \sin \frac{u}{2} \right), \end{aligned}$$

es una superficie parametrizada.

iii) Calcula $\mathbf{x}(u + 2\pi, -v)$ y úsalo para comparar $\mathbf{N}_{\mathbf{x}}(u, 0)$ con $\mathbf{N}_{\mathbf{x}}(u + 2\pi, 0)$.

Considera la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0)$. Encuentra δ tal que $\gamma = \mathbf{N} \circ \delta$.

iv) Calcula $\mathbf{n}_{\delta}^S$ y las curvaturas normal y geodésica.

v) Razona que ambas se deben anular en algún valor y que estos deben de ser distintos mód 2π sin usar cálculos, teniendo en cuenta solo el comportamiento del vector normal $\mathbf{N}_{\mathbf{x}}$.

[3] a) Sea S una superficie regular conexa y sea $\mathbf{p} \in S$.

i) Define carta geodésica normal y carta geodésica polar en $\mathbf{p}$.

ii) Considera dos cartas geodésicas polares distintas. ¿Cómo es su cambio de cartas?

b) Sea S una superficie regular orientada, $\mathbf{p} \in S$ y $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta de S tal que $\mathbf{p} = \mathbf{x}(0, 0)$.

Sea $\gamma : I \rightarrow S$ una curva regular parametrizada por el arco tal que $0 \in I$, $\gamma(0) = \mathbf{p}$ y existen funciones diferenciables $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$. Diremos que un campo $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tangente a S a lo largo de γ es *paralelo* si $\frac{DX}{dt} \equiv 0$.

i) Sean $X, Y : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos campos paralelos a lo largo de γ . Demuestra que $X + Y$ es paralelo, aX es paralelo si $a \in \mathbb{R}$, y $\langle X, Y \rangle$ es constante.

ii) Sea $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{p}}S$. Demuestra que existe un único campo $X_{\mathbf{u}} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ a lo largo de γ que es paralelo y tal que $X_{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}$.

Sea $t_0 \in I$. Considera la aplicación $P_{t_0, 0}^{\gamma} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\gamma(t_0)}S$ tal que $P_{t_0, 0}^{\gamma}(\mathbf{u}) := X_{\mathbf{u}}(t_0)$.

iii) Demuestra que $P_{t_0, 0}^{\gamma}$ es un isomorfismo lineal que preserva normas y ángulos.

iv) Calcula la aplicación anterior cuando $S = \mathbb{R}^2$.

v) Supón que γ es una geodésica. Demuestra que $\mathbf{n}_{\gamma}^S$ es un campo paralelo a lo largo de γ .

vi) Sean $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ las curvas definidas por

$$\gamma_1(t) := (\cos t, \sin t, 0), \quad \gamma_2(t) = (-\cos t, 0, \sin t).$$

Demuestra que son geodésicas y calcula $\mathbf{n}_{\gamma_i}^S$.

vii) Estudia los dominios y codominios de $P_{\pi, 0}^{\gamma_1}, P_{\pi, 0}^{\gamma_2}$ y estudia la composición de ellas que es un endomorfismo de $T_{(1, 0, 0)}\mathbb{S}^2$.