

Topología General

Empieza cada ejercicio en una hoja nueva y numéralas.

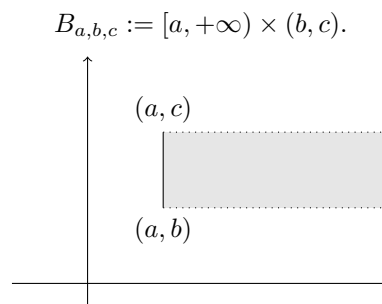
Pon tu nombre en **todas** las hojas.

Justifica razonadamente tus respuestas.

Ejercicio 1 (5 puntos). Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Demuéstralas o da un contraejemplo:

- Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y abierta entre espacios topológicos, que envía el punto x al punto y . Sea $\mathcal{B}$ una base de entornos de y . Entonces $\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base de entornos de x .
- Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos, y $A \subseteq X$. Entonces $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
- El cilindro de un espacio es compacto si y sólo si el espacio es compacto.
- Un espacio compacto y localmente compacto tiene un número finito de componentes conexas.

Ejercicio 2 (4 puntos). Para cada terna de números reales (a, b, c) , con $b < c$, definimos el conjunto



- Demuestra que la familia $\{B_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, b < c\}$ es base de alguna topología.
- ¿Es $\mathbb{R}^2$ con esta topología un espacio T_0 ? ¿Es T_1 ? ¿Es T_2 ?
- Calcula la clausura, interior, frontera y puntos aislados del cuadrado unidad

$$(0, 1) \times (0, 1)$$

en esta topología.

- ¿Es este espacio primero numerable? ¿y separable? ¿y segundo numerable?

Ejercicio 3 (3 puntos). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto, localmente compacto y Hausdorff.

- Demuestra que $X \times [0, +\infty)$ admite compactificación de Alexandroff (donde $[0, +\infty)$ tiene la topología usual).
- Sea $X^* := X \cup \{\star\}$ dicha compactificación. Demuestra que el cono¹ sobre X es homeomorfo a X^* .
- ¿Es X^* conexo? Demuéstralo o da un contraejemplo.
- Demuestra que $\star$ es punto de desconexión de X^* si y sólo si X no es conexo.

¹Recuerda que el cono sobre un espacio Y es $Y \times [0, 1] / \sim$, donde

$$(x, a) \sim (y, b) \iff \begin{cases} (x, a) = (y, b) \\ \text{ó} \\ a = b = 1 \end{cases}$$