UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA | Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS | 3 de julio de 2024

Geometría de Curvas y Superficies

Segundo parcial

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- Las tres preguntas tienen el mismo valor.
- Razona todas las respuestas.

[1] a) Sean S_1, S_2 superficies regulares, U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y las aplicaciones $f_1 : U \to S_1$, $f_2 : S_1 \to S_2$ y $f_3 : S_2 \to \mathbb{R}^m$:

i) Define qué significa que f_1, f_2 y f_3 sean diferenciables.

ii) Suponiendo que f_2 es diferenciable, define su diferencial en un punto.

iii) Demuestra que si f_2 es diferenciable, entonces $i \circ f_2$ es diferenciable, donde i es la inclusión de S_2 en $\mathbb{R}^3$.

b) Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ la carta de Mercator de la esfera.

i) Demuestra que este carta es conforme.

ii) Considera la curva plana

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, t) \end{aligned}$$

Calcula el ángulo entre $\mathbf{x} \circ \gamma$ y el meridiano correspondiente de la esfera en cada punto.

iii) Calcula la longitud total de la curva anterior en la esfera, entre el ecuador y el polo norte.

iv) Halla el intervalo máximo para el cual $\mathbf{y}_a \circ \gamma$ es una curva regular bien definida, donde $\mathbf{y}_a$ es la carta de Gall-Peters (para $a > 0$), y repite ii) para $\mathbf{y}_a$.

[2] Sea S una superficie regular, $\mathbf{p} \in S$ y $\gamma : (-1, 1) \to S$ una curva regular tal que $\gamma(0) = \mathbf{p}$.

a) i) Define las curvaturas geodésica y normal de γ en $\mathbf{p}$.

ii) Relaciónalas con la curvatura de γ en $\mathbf{p}$.

iii) Demuestra que las curvaturas principales de S en $\mathbf{p}$ son el máximo y el mínimo de las curvaturas normales en $\mathbf{p}$ de todas las curvas posibles de S que pasan por $\mathbf{p}$.

b) Considera la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\mathbf{x}} \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, u^2 v + u^3 - u^3 v, v). \end{aligned}$$

i) Demuestra que existe una superficie regular reglada S tal que $\mathbf{x}$ es una carta de S.

ii) Demuestra que ningún punto de S es elíptico.

iii) Considera los puntos $\mathbf{p} := (0, 0, 0)$, $\mathbf{q} := (1, 1, 1)$. Expresa en ellos la primera y segunda formas fundamentales de S, en la carta $\mathbf{x}$.

iv) Calcula las curvaturas de Gauss y media en $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.

v) Clasifica los puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ y halla las direcciones asintóticas en ellos, si existen.

[3] a) Sea S una superficie regular orientada

i) Define las nociones de derivada covariante, geodésica y geodésica parametrizada de S.

ii) Demuestra que una curva regular γ en S es una geodésica parametrizada si y sólo si $\frac{D\gamma'}{\mathrm{d}t}$ es proporcional a γ'.

b) Consideremos la superficie parametrizada

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times (1, +\infty) &\xrightarrow{\mathbf{x}} \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \left(\frac{\cos u}{v}, \frac{\operatorname{sen} u}{v}, \operatorname{argcosh} v - \frac{\sqrt{v^2 - 1}}{v} \right) \end{aligned}$$

Recordemos que $S := \mathbf{x}(\mathbb{R} \times (1, +\infty))$ es una superficie regular cuyas cartas son la restricción de $\mathbf{x}$ a $(a, a + 2\pi) \times (1, +\infty)$ para $a \in \mathbb{R}$ (no lo demuestres).

i) Calcula su primera forma fundamental.

ii) Calcular los símbolos de Christophel.

iii) Demuestra que si $\gamma : (1, \infty) \to \mathbb{R} \times (1, +\infty)$ viene dada por $\gamma(t) = (a, t)$, entonces $\mathbf{x} \circ \gamma$ es una geodésica reparametrizada de S.

iv) Sea $\gamma : I \to \mathbb{R} \times (1, +\infty)$ una parametrización regular de la intersección con $\mathbb{R} \times (1, +\infty)$ de una circunferencia centrada en $(a, 0)$ de radio $r > 1$. Demuestra que $\mathbf{x} \circ \gamma$ es una geodésica reparametrizada de S.