Topología General I

Tercera Convocatoria

[1] Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A \subset X$.

(a) Define la topología de subespacio de A.

(b) Sea Y otro espacio topológico y sea $f : Y \to X$ una aplicación continua tal que $f(Y) \subset A$. Demuestra que la aplicación $\tilde{f} : Y \to A$, dada por $\tilde{f}(y) := f(y)$, $\forall y \in Y$, es continua.

(c) Sea $X := \mathbb{R}$ y $A := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$; demuestra que A es discreto con la topología de subespacio.

(d) Sea $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$. Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $f(t) := (\cos t, \operatorname{sen} t)$ está bien definida y es continua, asumiendo que las funciones $\cos, \operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lo son.

[2] Sean X un conjunto, $\mathcal{T}$ una topología sobre X y $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$.

(a) Di qué significa que $\mathcal{S}$ es subbase de $(X, \mathcal{T})$.

(b) Sea Y otro espacio topológico y supongamos que $\mathcal{S}$ es subbase de $(X, \mathcal{T})$. Demuestra que una aplicación $f : Y \to X$ es continua si y solo si $f^{-1}(S)$ es abierto de Y para todo $S \in \mathcal{S}$.

(c) Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología de subbase $\mathcal{S} := \{[n, n+2] \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Encuentra una base de esta topología y caracteriza los subconjuntos unipuntuales abiertos.

(d) Sea $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_{a,b}(t) := at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Si fijamos la topología del Ejercicio (2c) tanto en el espacio de salida como en el de llegada, £para qué valores de a y b es la aplicación $f_{a,b}$ continua?

[3] Sea X un conjunto y sean d_1, d_2 seudométricas sobre X

(a) £Qué significa que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes?

(b) Demuestra que $1_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es homeomorfismo si y solo si d_1, d_2 son topológicamente equivalentes.

(c) Sea $g : [0, 1) \to \mathbb{S}^1$ la restricción de la aplicación del Ejercicio (1d) a $[0, 1)$. Demuestra que g es continua, biyectiva pero no es homeomorfismo.

(d) Demuestra que si X es seudométrico y $x, y \in X$ se tiene que y está en todos los entornos de x si y solo si $d(x, y) = 0$. Utiliza este resultado para demostrar que la topología del Ejercicio (2c) no es seudometrizable.

[4] Sea X un espacio topológico.

(a) £Qué significa que X es primero numerable?

(b) Demuestra que todo espacio seudométrico es primero numerable.

(c) Demuestra que la topología sobre $\mathbb{R}$ del Ejercicio (2c) es primero numerable.

(d) Con la topología sobre $\mathbb{R}$ del Ejercicio (2c) calcula clausura, interior y conjunto aislado de los subconjuntos $\{\frac{1}{2}\}$, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathbb{Z}$.