Geometría de Curvas y Superficies

[1] a) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada.

(i) Define el diedro de Frenet y la curvatura de $\mathbf{x}$.

Solución. El campo vectorial tangente $\mathbf{t_x}$ es la normalización del vector velocidad $\frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|}$. Por tanto, para definirlo hace falta que la curva sea regular. El campo vectorial normal es el ortogonal $\mathbf{n_x} := \mathbf{t}_\mathbf{x}^\perp$. Por último la curvatura es

$$\kappa_\mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{t}'_\mathbf{x}, \mathbf{n_x} \rangle}{\|\mathbf{x}'\|}. \qquad \square$$

(ii) Razona que solo se puede definir si la curva es regular.

Solución. Ya se ha comentado en el apartado anterior, ya que hay que dividir por $\|\mathbf{x}'\|$. $\square$

(iii) Supón que $\mathbf{x}$ es regular. Dado $t_0 \in I$, considera la función

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{h} \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0), \mathbf{n}(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

Úsala para demostrar que si la curva *atraviesa* la recta tangente a $\mathbf{x}$ en $t = t_0$, entonces la curvatura se anula en $t = t_0$.
Atravesar significa que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{x}(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ corta a los dos semiplanos abiertos determinados por la recta tangente a $\mathbf{x}$ en $t = t_0$.

Demostración. Es claro que h es $\mathcal{C}^\infty$ y que $h(t_0) = 0$. Además $h'(t) = \|\mathbf{x}'(t)\| \langle \mathbf{t_x}(t), \mathbf{n}(t_0) \rangle$, por lo que $h'(t_0) = 0$. Finalmente

$$h''(t_0) = \|\mathbf{x}'\|'(t_0) \underbrace{\langle \mathbf{t_x}(t_0), \mathbf{n}(t_0) \rangle}_{0} + \|\mathbf{x}'(t_0)\| \langle \mathbf{t}'_\mathbf{x}(t_0), \mathbf{n}(t_0) \rangle = \|\mathbf{x}'(t_0)\|^2 \kappa_\mathbf{x}(t_0).$$

Si la curva *atraviesa* el signo no es constante, luego el desarrollo de Taylor de h en t_0 no puede empezar en grado 2, es decir, $\kappa_\mathbf{x}(t_0) = 0$. $\square$

b) Considera la elipse

$$E_{a,b} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}, \quad a > b > 0.$$

(i) Encuentra una parametrización periódica $\mathbf{x}$ que haga que el conjunto $E_{a,b}$ sea la imagen de un curva regular de curvatura negativa (y calcúlala).

Solución (omitiendo cálculos). Tomamos la parametrización habitual $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to E_{a,b}$ dada por $\mathbf{x}(t) := (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$. Es fácil comprobar que es periódica y que cubre toda la elipse. Además

$$\kappa_\mathbf{x}(t) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}^3}.$$

No sirve porque la curvatura es positiva. Como $t \mapsto -t$ cambia el signo de la curvatura, tomemos $\mathbf{y}(t) := (a \cos(-t), b \operatorname{sen}(-t)) = (a \cos t, -b \operatorname{sen} t)$. $\square$

(ii) Calcula la derivada de la curvatura y di en qué puntos de $E_{a,b}$ se encuentran los vértices.

Solución. Tenemos

$$\kappa_{\mathbf{y}}(t) = \frac{-ab}{\sqrt{f(t)}^3}, \qquad f(t) := a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t.$$

Es decir

$$\kappa'_{\mathbf{y}}(t) = \frac{3abf'(t)}{2\sqrt{f(t)}^5}.$$

Como $f'(t) = 2(b^2 - a^2) \operatorname{sen} t \cos t$, que se anula cuando $t = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (ya que $a \neq b$), los vértices son los puntos $(\pm a, 0), (0, \pm b)$. $\square$

c) Sea $\mathbf{x} : J \to \mathbb{R}^2$ una curva plana regular; dado $t_0 \in I$ consideramos la función $L : I \to \mathbb{R}$ dada por $L(t) := \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{x}'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau$. Sea $\mathbf{y} : J \to \mathbb{R}^2$ la curva dada por $\mathbf{y}(t) := \mathbf{x}(t) - L(t)\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(t)$.

(i) Demuestra que $\mathbf{x}$ es evoluta de $\mathbf{y}$.

Solución. Recordemos que la evoluta de $\mathbf{y}$ es

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} + \frac{\|\mathbf{y}'\|^2}{\det(\mathbf{y}' \ \mathbf{y}'')} \mathbf{y}'^{\perp}.$$

Como $L' = \|\mathbf{x}'\|$, tenemos:

$$\mathbf{y}' = \underbrace{\mathbf{x}' - \|\mathbf{x}'\| \, \mathbf{t}_{\mathbf{x}}}_{0} - L \|\mathbf{x}'\| \, \kappa_{\mathbf{x}} \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \Longrightarrow \|\mathbf{y}'\| = L \|\mathbf{x}'\| \, |\kappa_{\mathbf{x}}| \, .$$

Derivando otra vez

$$\mathbf{y}'' = L \|\mathbf{x}'\|^2 \kappa_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{t}_{\mathbf{x}} - (L \|\mathbf{x}'\| \, \kappa_{\mathbf{x}})' \mathbf{n}_{\mathbf{x}}.$$

Al ser $(\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(t), \mathbf{n}_{\mathbf{x}}(t))$ una base ortonormal positiva podemos usar sus coordenadas para calcular el determinante:

$$\det(\mathbf{y}' \ \mathbf{y}'') = L^2 \|\mathbf{x}'\|^3 \kappa_{\mathbf{x}}^3 \Longrightarrow \frac{\|\mathbf{y}'\|^2}{\det(\mathbf{y}' \ \mathbf{y}'')} = \frac{L^2 \|\mathbf{x}'\|^2 \kappa_{\mathbf{x}}^2}{L^2 \|\mathbf{x}'\|^3 \kappa_{\mathbf{x}}^3} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'\| \, \kappa_{\mathbf{x}}}.$$

Como $\mathbf{y}'^{\perp} = L \|\mathbf{x}'\| \, \kappa_{\mathbf{x}} \mathbf{t}_{\mathbf{x}}$, se tiene el resultado. $\square$

(ii) Calcúla $\mathbf{y}$ si $\mathbf{x}$ es una circunferencia.

Solución. Tomemos la circunferencia $\mathbf{x}(t) = (a + r\cos t, b + r \operatorname{sen} t)$, $t_0 = 0$. La función longitud es $L(t) = rt$ y $\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$. Basta juntar los datos. $\square$

[2] a) Sean I un intervalo abierto, $t_0 \in I$, y sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular con torsión no nula.

i) Describe la intersección y la posición relativa de la curva $\mathbf{x}$ en un entorno $\mathbf{p} = \mathbf{x}(t_0)$ con los planos osculador y rectificante.

Demostración. El plano osculador es $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid f(t) = 0\}$ con $f(t) := \langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0), \mathbf{b}(t) \rangle$. Los signos de f nos indican la intersección y la posición relativa con respecto al plano osculador. Es obvio que $f(t_0) = 0$ (el punto está en el plano). Suponemos que la curva está parametrizada por el arco. Entonces

$$f'(t) = \underbrace{\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t) \rangle}_{0} - \tau(t)\langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0), \mathbf{n}(t) \rangle \Longrightarrow f'(t_0) = 0.$$

Derivamos otra vez:

$$f''(t) = -\tau'(t)\langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0), \mathbf{n}(t) \rangle + \tau(t) \underbrace{\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \rangle}_{0} +$$
$$\kappa(t)\tau(t)\langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0), \mathbf{t}(t) \rangle - \tau(t)^2 \langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0), \mathbf{b}(t) \rangle \Longrightarrow f''(t_0) = 0.$$

Finalmente, obviando todos los términos donde aparezca $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)$:

$$f'''(t_0) = -\tau'(t_0)\langle \mathbf{t}(t_0), \mathbf{n}(t_0) \rangle + \kappa(t_0)\tau(t_0)\langle \mathbf{t}(t_0), \mathbf{t}(t_0) \rangle - \tau(t_0)^2 \langle \mathbf{t}(t_0), \mathbf{b}(t_0) \rangle \neq 0.$$

Como el primer término no nulo del desarrollo de Taylor es de grado 3, la curva atraviesa el plano. Para el plano rectificante (cuyo vector ortogonal es el normal) usamos la función $g(t) := \langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0), \mathbf{n}(t) \rangle$, con $g(t_0) = 0$:

$$g'(t) = -\kappa(t)\langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0), \mathbf{t}(t) \rangle + \tau(t)\langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0), \mathbf{b}(t) \rangle \Longrightarrow g'(t_0) = 0.$$

Como antes, para la siguiente derivada solo mostramos los sumandos que no contienen $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)$:

$$g'(t_0) = -\kappa(t_0) \|\mathbf{t}(t_0)\|^2 + \tau(t_0)\langle \mathbf{t}(t_0), \mathbf{b}(t_0) \rangle = -\kappa(t_0) \neq 0.$$

Como el desarrollo de Taylor empieza en grado 2, la curva no atraviesa el plano rectificante. □

ii) ¿Es posible que $\mathbf{x}(I)$ esté contenida en el plano rectificante para $t = t_0$?

Solución. Si está en un plano, la torsión se anula, luego no es posible. □

iii) Demuestra que si todas las rectas tangentes son paralelas entre sí, entonces $\mathbf{x}$ es una parametrización de una recta.

Solución. Tenemos que los vectores tangentes $\mathbf{t}(t)$ son iguales u opuestos, por continuidad, iguales. Por tanto $\mathbf{t}'$ es idénticamente nulo y la curvatura es cero, luego se trata de una recta. De hecho, no cumple las condiciones de birregular. □

b) Dos curvas birregulares $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^3$ son *compañeros de Bertrand* si las rectas normales $r_{\mathbf{n_x}}(t)$ (resp. $r_{\mathbf{n_y}}(t)$) para $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{y}$) en $t \in I$ coinciden. Supongamos que $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^3$ son compañeros de Bertrand.

i) Demuestra que $\mathbf{n_x}(t) = \pm \mathbf{n_y}(t)$ para todo $t \in I$.

Solución. Como las rectas normales coinciden, los vectores normales son proporcionales, y al ser unitarios solo queda la opción del enunciado. Además, por continuidad, el signo es siempre el mismo. □

ii) Demuestra que existe una función diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \alpha(t)\mathbf{n_x}(t)$.

Solución. La existencia de la función α es una consecuencia inmediata de la coincidencia de las rectas normales correspondientes (no solo son paralelas, son iguales). Como α es $\langle \mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{n_x}\rangle$, es claramente $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

iii) Demuestra que α es constante.

Solución. Tenemos $\alpha' = \langle \mathbf{t_y} - \mathbf{t_x}, \mathbf{n_x}\rangle - \alpha\langle \mathbf{n_x}, \mathbf{n}'_\mathbf{x}\rangle$. Por la igualdad $\mathbf{n_x} = \pm\mathbf{n_y}$ y ser $\mathbf{n_x}$ unitario, todos los sumandos son nulos. $\square$

iv) Demuestra que el ángulo entre los vectores tangemtes $\mathbf{t_x}(t)$ y $\mathbf{t_y}(t)$ es constante.

Solución. El coseno del ángulo que forman es una función diferenciable cuya derivada es

$$2\langle \mathbf{t}'_\mathbf{x} - \mathbf{t}'_\mathbf{y}, \mathbf{t_x} - \mathbf{t_y}\rangle = \langle \|\mathbf{x}'\|\,\kappa_\mathbf{x}\mathbf{n_x} - \|\mathbf{y}'\|\,\kappa_\mathbf{y}\mathbf{n_y}, \mathbf{t_x} - \mathbf{t_y}\rangle$$

que se anula usando de nuevo $\mathbf{n_x} = \pm\mathbf{n_y}$. $\square$

c) Considera la curva $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(t) := (\cos t - \operatorname{sen} t, 1 + 2\operatorname{sen} t - \cos t, 2 + \cos t + \operatorname{sen} t)$.

i) Calcula el triedro de Frenet en $t = 0$.

Solución. Calculemos las derivadas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (-\operatorname{sen} t - \cos t, 2\cos t + \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t + \cos t)\\
\mathbf{x}''(t) &= (-\cos t + \operatorname{sen} t, -2\operatorname{sen} t + \cos t, -\cos t - \operatorname{sen} t)\\
\mathbf{x}'''(t) &= -\mathbf{x}'(t).
\end{aligned}$$

En $t = 0$:

$$\mathbf{x}'(0) = (-1, 2, 1), \quad \mathbf{x}''(0) = (-1, 1, -1), \quad \mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) = (-3, -2, 1).$$

Normalizando,

$$\mathbf{t}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}(-1, 2, 1), \qquad \mathbf{b}(0) = \frac{\sqrt{14}}{14}(-3, -2, 1)$$

Con el producto vectorial obtenemos el vector normal. $\square$

ii) ¿Está $\mathbf{x}$ parametrizada por el arco?

Solución. Tenemos que $\|\mathbf{x}'(t)\|^2 = 3 + \cos^2 t + 6\operatorname{sen} t\cos t$ no es constante (basta derivar), por lo que no es ni siquiera proporcional al parámetro arco. $\square$

iii) Demuestra que la imagen de $\mathbf{x}$ está contenida en un plano.

Solución. En la fórmula de la torsión, el numerador es el determinante de las tres derivadas, como la primera y la tercera son opuestas, entonces, la torsión es nula y la curva está en un plano. $\square$

iv) Demuestra que de hecho $\mathbf{x}$ es una circunferencia y encuentra el centro y el radio.

Solución. Por error en el enunciado, este problema se ha calificado como correcto a todos. $\square$

[3] a) Sea S una superficie regular conexa.

i) Define campo vectorial normal y bilateralidad.

Solución. Un campo vectorial normal es una aplicación continua $\mathbf{N} : S \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ es unitario y ortogonal a $T_{\mathbf{p}}S$. Una superficie es bilateral si admite un campo vectorial normal. $\square$

ii) Sea $\mathbf{x} : U \to S$ una carta. Justifica que $\mathbf{x}(U)$ es bilateral.

Solución. La aplicación $\mathbf{N} : \mathbf{x}(U) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \circ \mathbf{x}^{-1}$$

es composición de continuas: $\mathbf{x}^{-1}$ es homeomorfismo sobre la imagen, y la primera se obtiene multiplicando y sumando funciones diferenciables en un abierto de $\mathbb{R}^2$ y dividiendo por la raíz cuadrada de una función no nula. Además, por las propiedades del producto vectorial el resultado en cada punto es un vector normal unitario. $\square$

iii) Supón que existe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$ tal que $S = F^{-1}(0)$, $\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $\forall (x_0, y_0, z_0) \in S$. Justifica que

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{\mathbf{N}} \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto \frac{\operatorname{grad} F(x, y, z)}{\|\operatorname{grad} F(x, y, z)\|} \end{aligned}$$

es un campo vectorial normal.

Solución. Por continuidad, podemos tomar un entorno abierto V de S donde el gradiente no se anula y es posible extender $\mathbf{N}$ a dicho abierto. Esta función vectorial es claramente continua y la imagen es un vector unitario.
Sean $\mathbf{p} \in S$ y $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{p}}S$. Sea $\boldsymbol{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ es una curva $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \mathbf{p}$ y $\boldsymbol{\gamma}'(0) = \mathbf{u}$, cuya existencia viene garantizada por ser $\mathbf{u}$ tangente. Entonces, $F \circ \boldsymbol{\gamma} \equiv 0$ por lo que

$$0 = (F \circ \boldsymbol{\gamma})'(0) = \langle \operatorname{grad} F_{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\gamma}'(0) \rangle$$

por lo que el vector también es normal. $\square$

b) Considera la curva $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\boldsymbol{\gamma}(t) := (6t, 3t^2, t^3)$. Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(u, v) = \boldsymbol{\gamma}(u) + v\boldsymbol{\gamma}'(u)$.

i) Demuestra que $\mathbf{x}$ es una superficie parametrizada.

Solución. Es claramente $\mathcal{C}^\infty$ y además $\mathbf{x}_u(u, v) = \boldsymbol{\gamma}'(u) + v\boldsymbol{\gamma}''(u)$ y $\mathbf{x}_v(u, v) = \boldsymbol{\gamma}'(u)$. El espacio vectorial que engendran estos vectores es el mismo que $\boldsymbol{\gamma}'(u)$ y $v\boldsymbol{\gamma}''(u)$. Como $\boldsymbol{\gamma}$ es claramente birregular y $v > 0$, tenemos el resultado. Observemos que $\boldsymbol{\gamma}'(t) = 3(2, 2t, t^2)$ y $\boldsymbol{\gamma}''(t) = 6(0, 1, t)$. El primer menor es 36, luego es efectivamente birregular. $\square$

ii) ¿Es una superficie regular?

Solución. Tenemos $\mathbf{x}(u, v) = (6(u + v), 3u(u + 2v), u^2(u + 3v))$. Para ver que es inyectiva, supongamos que $\mathbf{x}(u_1, v_1) = \mathbf{x}(u_2, v_2)$. Si $u_1 = 0$, la segunda y la tercera variable se anulan, y eso solo es posible si $u_2 = 0$ y en ese caso, $v_1 = v_2$.

Supongamos ahora que $u_1 \neq 0$. En ese caso $u_2 \neq 0$. Si $u_1 = u_2$ es inmediato que $v_1 = v_2$. Supongamos ahora $u_1 \neq u_2$. Tenemos $w_1 := u_1 + v_1 = u_2 + v_2 =: w_2$, es decir, $w_1 = w_2 = w$. Luego

$$\begin{cases} u_1(2w - u_1) & = u_2(2w - u_2) \\ u_1^2(3w - 2u_1) & = u_2^2(3w - 2u_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2w(u_1 - u_2) & = u_1^2 - u_2^2 \\ 3w(u_1^2 - u_2^2) & = 2(u_1^3 - u_2^3) \end{cases} \iff \begin{cases} 2w & = u_1 + u_2 \\ w^2 & = u_1 u_2 \end{cases}$$

En conclusión, u_1, u_2 son las soluciones de $T^2 - 2wT + w^2 = 0$, lo que nos lleva a contradicción ya que hemos supuesto que $u_1 \neq u_2$. Hemos probado que $\mathbf{x}$ es inyectiva.

Veamos que es homeomorfismo sobre la imagen. Sean $\{(u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y (u_0, v_0) en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ tal que $\mathbf{x}(u_n, v_n) \to \mathbf{x}(u_0, v_0)$.

Denotamos $w_n = u_n + w_n$ para $n \geq 0$. En primer lugar $w_n \to w_0$. Además,

$$\begin{array}{ccc} u_n(2w_n - u_n) & \to & u_0(2w_0 - u_0) \\ u_n^2(3w_n - 2u_n) & \to & u_0^2(3w_0 - 2u_0) \end{array} \iff \begin{array}{rcc} (u_n - u_0)(2w_n - (u_n + u_0)) & \to & 0 \\ (u_n - u_0)(3(u_n + u_0)w_n - 2(u_n^2 + u_n u_0 + u_0^2)) & \to & 0 \end{array}$$

Vamos a suponer que hay una subsucesión k_n tal que $u_{k_n} - u_0$ está a distancia acotada de 0. Para esta subsucesión, $u_{k_n} + u_0 \to 2w_0$ y, usando que $u_n^2 + u_n u_0 + u_0^2 = (u_n + u_0)^2 - u_n u_0$, tenemos que $u_0 u_{k_n} \to w_0^2$. Si $u_0 = 0$, vemos que $u_{k_n} \to u_0 = 0$ lo que es imposible. Si $u_0 \neq 0$, vemos que el límite de u_{k_n} es

$$2w_0 - u_0 = \frac{w_0^2}{u_0},$$

luego $u_0 = w_0$ y volvemos a tener $u_{k_n} \to u_0$, contradicción.

Como no existe dicha subsucesión, tenemos que $u_n \to u_0$ y por tanto $v_n \to v_0$ y la aplicación $\mathbf{x}$ es un homeomorfismo sobre la imagen. □

iii) Sea $\boldsymbol{\delta} : (0, \infty) \to S \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida como $\boldsymbol{\delta}(t) := \mathbf{x}(at + b, t)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Calcula su curvatura. ¿Cuándo se anula?

Solución. Tenemos

$$\boldsymbol{\delta}'(t) = a\mathbf{x}_u(at + b, t) + \mathbf{x}_v(at + b, t) = a\boldsymbol{\gamma}'(at + b) + t\boldsymbol{\gamma}''(at + b)$$

y

$$\boldsymbol{\delta}''(t) = a^2\boldsymbol{\gamma}''(at + b) + at\boldsymbol{\gamma}'''(at + b).$$

Con estos datos se calcula la curvatura. El numerador se anula si el $\boldsymbol{\delta}'(t) \times \boldsymbol{\delta}''(t)$; la tercera coordenada es $a(a+1)(a+2)$. Comprobamos que la curvatura se anula siempre si $a = 0$ (¡son rectas!) y también para $t = 0$ si $a = -1, 2$. □

iv) Demuestra que S es bilateral y calcula un campo vectorial normal unitario.

Solución. Como S es imagen de una carta, es bilateral. La imagen para $\mathbf{x}(u, v)$ es el normalizado de

$$-\boldsymbol{\gamma}'(u) \times \boldsymbol{\gamma}''(u) = -18(u^2, -2u, 2).$$ □

v) ¿Para qué valores $(u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ existe una carta $\mathbf{y} : U \to \mathbf{x}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ de la forma $(u, v) \mapsto (u, h(u, v), v)$ para alguna función h y tal que $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ está en la imagen de $\mathbf{y}$.

Solución. Observemos que esta situación ocurre si la segunda coordenada del vector normal es no nula, es decir, si $u \neq 0$. □