UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA — Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS — 10 de enero de 2025

Geometría de Curvas y Superficies

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- Las tres preguntas tienen el mismo valor.
- Razona todas las respuestas.

[1] Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada cerrada de periodo $T > 0$.

a) (i) Define el diedro de Frenet y la curvatura y demuestra que son periódicos. ¿Qué puedes decir de ambos periodos?

Solución. Asumiendo que la curva es regular, el campo vectorial tangente es el normalizado de $\mathbf{x}'$ y el campo vectorial normal, su ortogonal. La curvatura (*tasa de la variación angular*) es $\frac{\det(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')}{\|\mathbf{x}'\|^3}$ (también se puede definir empezando todo por ppa). Como $\mathbf{x}$ es periódica, se tiene,

$$\mathbf{x}'(t+T) = \mathbf{x}'(t),$$

con lo que $\mathbf{x}'$ es periódica de periodo un divisor de T (o constante). Como el diedro y la curvatura dependen solo de las derivadas, la afirmación anterior se extiende. □

(ii) ¿Es posible que $\mathbf{x}'$ sea periódica pero $\mathbf{x}$ no lo sea? Justifica tu respuesta con una demostración o con un contraejemplo.

Solución. Considera la curva $\mathbf{x}(t) = (t + \cos t, \operatorname{sen} t)$, con derivada periódica, pero ella no lo es. □

(iii) Supón que $\kappa'(0) \neq 0$. Demuestra que la curva tiene un vértice para algún valor $t_0 \in (0, T)$. ¿Puede tener solo uno?

Demostración. Como $\kappa(0) = \kappa(T)$, por el Teorema de Rolle, κ' se anula en algún punto de $t_0 \in (0, T)$. Volvemos a aplicar el mismo teorema y encontramos otro valor de $t_1 \in (t_0, t_0 + T)$ donde la derivada se anula, y que no es T; si $t_1 \in (t_0, T)$, y atenemos el segundo valor; si $t_1 \in (T, t_0 + T)$, tomamos $t_1 - T$. □

b) Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular cerrada de periodo $T > 0$.

(i) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$ con $h' > 0$, tal que $h(0) = 0$ y $h(t + h^{-1}(T)) = h(t) + T$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Demuestra que $\mathbf{y} := \mathbf{x} \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada de periodo $h^{-1}(T)$.

Solución. Tenemos

$$\mathbf{y}(t + h^{-1}(T)) = \mathbf{x}(h(t + h^{-1}(t))) = \mathbf{x}(h(t) + T) = \mathbf{x}(h(t)) = \mathbf{y}(t).$$

Como $\mathbf{y}$ no es constante, el periodo es un divisor de $h^{-1}(T)$; como h es biyectiva, encontramos valores $t \in \mathbb{R}$, $T' \in (0, T)$ tal que $\mathbf{y}(t + T') \neq \mathbf{y}(t)$. □

(ii) Demuestra que

$$\int_0^T \kappa_{\mathbf{x}}(t)\, \|\mathbf{x}'(t)\|\, \mathrm{d}t = \int_0^{h^{-1}(T)} \kappa_{\mathbf{y}}(\tau)\, \|\mathbf{y}'(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau.$$

Solución. Basta aplicar el teorema de cambio de variable:

$$\int_0^{h^{-1}(T)} \kappa_{\mathbf{y}}(\tau)\,\|\mathbf{y}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{h^{-1}(T)} \kappa_{\mathbf{x}}(h(\tau))h'(t)\,\|\mathbf{x}'(h(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{T} \kappa_{\mathbf{x}}(t)\,\|\mathbf{x}'(t)\|\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

(iii) Aplica (i) a $L^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donde

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\ L\ } \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t \|\mathbf{x}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

para demostrar que la reparametrización por el arco de $\mathbf{x}$ es periódica.

Solución. Si la condición de (i) es cierta para L^{-1} como $(L^{-1})'(t) = \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}$, es inmediato que $\mathbf{y} := \mathbf{x}\circ L^{-1}$ es periódica. Entonces,

$$L(t+T) = \int_0^t \|\mathbf{x}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau + \int_t^{t+T} \|\mathbf{x}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau = L(t)+L(T) \iff t+T = L^{-1}(L(t)+L(T)).$$

Denotemos $h = L^{-1}$, $s = L(t)$, $\ell := L(T)$

$$h(s + h^{-1}(T)) = h(s) + T. \qquad \square$$

(iv) Usando que $\mathbf{y}$ es ppa y que existe una función diferenciable $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(s) = (\cos\alpha(s), \operatorname{sen}\alpha(s))$, demuestra que la integral de (ii) es un múltiplo entero de 2π.

Solución. Como es ppa, tenemos que $\mathbf{t}'_{\mathbf{y}}(s) = \alpha'(s)(-\operatorname{sen}\alpha(s), \cos\alpha(s)) = \alpha'(s)\mathbf{n}_{\mathbf{y}}(s)$, por lo que $\kappa_{\mathbf{y}} = \alpha'$. Así, si T_1 es el periodo de $\mathbf{y}$,

$$\int_0^{T_1} \kappa_{\mathbf{y}}(\tau)\,\|\mathbf{y}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{T_1} \alpha'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \alpha(T_1) - \alpha(0),$$

y como los dos ángulos tienen las mismas razones trigonométricas, se da el resultado. $\square$

(v) Calcula la integral de (ii) cuando $\mathbf{x}(t) = (a\cos t, b\operatorname{sen} t)$, $a, b \neq 0$.

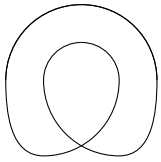
Solución. Calculando las derivadas, tenemos

$$\int_0^{2\pi} \kappa_{\mathbf{x}}(t)\,\|\mathbf{x}'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Con el cambio de variable $s = \operatorname{tg} t$, esta integral es

$$2ab\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^2a^2 + b^2}\,\mathrm{d}s = 2\pi \qquad \square$$

(vi) Supón que la imagen de $\mathbf{x}$ tiene la siguiente forma:



¿Puedes razonar (no hace falta demostrar) cuál será el valor de la integral?

Solución. Si observamos cómo gira el vector tangente, vemos que da dos vueltas, por lo que el resultado es 4π (el ángulo antihorario es siempre creciente y pasa dos veces por el eje X positivo). $\square$

[2] a) Sean I un intervalo abierto y $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^3$ dos curvas espaciales.

i) Supongamos que sus campos tangentes son paralelos. ¿Qué puedes decir de sus triedros de Frenet?

Demostración. Como $\mathbf{t_y} = \pm\mathbf{t_x}$, la misma relación se da al derivar y normalizar, es decir $\mathbf{n_y} = \pm\mathbf{n_x}$ (mismo cambio de signo). Por las propiedades del producto vectorial los campos binormales coinciden. □

ii) Supongamos que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son curvas simétricas con respecto a un plano. Describe la relación entre sus curvaturas, $\kappa_\mathbf{x}$ y $\kappa_\mathbf{y}$, y entre sus torsiones, $\tau_\mathbf{x}$ y $\tau_\mathbf{y}$.

Demostración. Una simetría es un movimiento que cambia la orientación y hemos visto que conserva la curvatura y cambia el signo de la torsión. □

b) Sean I un intervalo abierto y $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular con torsión no nula. Decimos que $\mathbf{x}$ es una hélice si el cociente de su torsión por su curvatura es constante.

i) Demuestra que la curva

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\ \mathbf{x}\ } \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (t + \sqrt{3}\operatorname{sen} t, 2\cos t, \sqrt{3}\ t - \operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

es una hélice.

Solución. Tenemos

$$\mathbf{x}'(t) = (1 + \sqrt{3}\cos t, -2\operatorname{sen} t, \sqrt{3} - \cos t), \quad \mathbf{x}''(t) = (-\sqrt{3}\operatorname{sen} t, -2\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Por tanto $\|\mathbf{x}'(t)\| = 2\sqrt{2}$, $\langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t)\rangle = 0$, $\|\mathbf{x}''(t)\| = 2$. es decir $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ son los normalizados de las dos primeras derivadas y $\kappa(t) = \frac{\mathbf{t}'(t)}{\|\mathbf{x}'\|} = \frac{1}{4}$. Además,

$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = (2\sqrt{3}\cos t - 2, -4\operatorname{sen} t, -2\cos t - 2\sqrt{3}) \Longrightarrow \mathbf{b}(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}\cos t - 1, -2\operatorname{sen} t, -\cos t - \sqrt{3}).$$

Por tanto,

$$\mathbf{b}'(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{x}''(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{n}(t) = -\tau(t)\,\|\mathbf{x}'(t)\|\,\mathbf{n}(t) = -2\sqrt{2}\tau(t)\mathbf{n}(t)$$

Así, $\tau = -\frac{1}{4}$, y se trata de una hélice. □

ii) Calcula su triedro de Frenet en $t = 0$.

Solución. Basta evaluar los cálculos anteriores en $t = 0$:

$$\mathbf{t}(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}, 0, \sqrt{3} - 1), \quad \mathbf{n}(0) = (0, -1, 0), \quad \mathbf{b}(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1, 0, -1 - \sqrt{3}).$$ □

iii) Calcula una reparametrización por el arco $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de $\mathbf{x}$.

Solución. Basta tomar $\boldsymbol{\gamma}(t) := \mathbf{x}\left(\frac{\sqrt{2}t}{4}\right)$. □

iv) Encuentra una dirección $\mathbf{u} = (a, b, c)$ tal que el ángulo α entre $\mathbf{u}$ y el vector tangente $\mathbf{t_x}(t)$ sea constante.

Solución. Queremos que se cumpla

$$0 = a(1+\sqrt{3}\cos t) - 2b\operatorname{sen} t + c(\sqrt{3}-\cos t) = a + c\sqrt{3} + (a\sqrt{3}-c)\cos t - 2b\operatorname{sen} t.$$

Basta tomar $b = 0$, $a = 1$ y $c = \sqrt{3}$. □

[3] a) Define superficie reglada. Da las condiciones para que sea una superficie parametrizada. Calcula los campos vectoriales coordenados, el campo vectorial normal unitario, define la curva de estricción y di cuándo se puede construir.

Demostración. Una superficie reglada se puede ver como la unión de una familia de rectas que varía diferenciablemente. De manera más precisa es una aplicación diferenciable $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{x}(u,v) := \boldsymbol{\gamma}(u) + v\mathbf{d}(t)$, donde $\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{d} : I \to \mathbb{R}^3$ son curvas diferenciables y $\mathbf{d}(t) \neq 0$, $\forall t \in I$ (representa un vector director de cada recta). Suele ser mejor presentarlos normalizado de manera que $\mathbf{d}(I) \subset \mathbb{S}^2$.

Para que sea superficie parametrizada, necesitamos que los vectores

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \boldsymbol{\gamma}'(u) + v\mathbf{d}'(u), \quad \mathbf{x}_v(u,v) = \mathbf{d}(u,v)$$

sean linealmente independientes $\forall u, v \in I \times \mathbb{R}$. Observemos que $\mathbf{x}_v(u,v)$ siempre es no nulo. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt, queremos ver si

$$\mathbf{d}(u,v) \text{ y } \boldsymbol{\gamma}'(u) - \langle \boldsymbol{\gamma}'(u), \mathbf{d}(u)\rangle \mathbf{d}(u) + v\mathbf{d}'(u)$$

son linealmente independientes, lo que equivale a que el último vector sea no nulo. Su norma es:

$$\|\boldsymbol{\gamma}'(u)\|^2 - \langle \boldsymbol{\gamma}'(u), \mathbf{d}(u)\rangle^2 + 2v\langle \boldsymbol{\gamma}'(u), \mathbf{d}'(u)\rangle + v^2 \|\mathbf{d}'(u)\|^2 .$$

Esta expresión, cuadrática en v tiene algún cero si y solo si el discriminante

$$\langle \boldsymbol{\gamma}'(u), \mathbf{d}'(u)\rangle^2 - (\|\boldsymbol{\gamma}'(u)\|^2 - \langle \boldsymbol{\gamma}'(u), \mathbf{d}(u)\rangle^2) \|\mathbf{d}'(u)\|^2$$

es no negativo. Ya hemos calculado los campos vectoriales coordenados. Su campo vectorial normal unitario es el normalizado de

$$\boldsymbol{\gamma}'(u) \times \mathbf{d}(u,v) + v\mathbf{d}'(u) \times \mathbf{d}(u,v).$$

Recordemos finalmente que la curva de estricción $\boldsymbol{\delta} := \boldsymbol{\gamma} + r\mathbf{d}$, $r : I \to \mathbb{R}$ diferenciable, es aquella que cumple que $\boldsymbol{\delta}' \perp \mathbf{d}'$, lo que se obtiene así:

$$0 = \langle \boldsymbol{\gamma}', \mathbf{d}'\rangle + r'\langle \mathbf{d}, \mathbf{d}'\rangle + r\langle \mathbf{d}', \mathbf{d}'\rangle = \langle \boldsymbol{\gamma}', \mathbf{d}'\rangle + r\|\mathbf{d}'\|^2 .$$

Se puede despejar si $\mathbf{d}$ es regular. □

b) Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ una hélice parametrizada por el arco; como el cociente de la curvatura y la torsión es constante, lo podemos escribir como $\kappa = \tau \operatorname{cotg} \alpha$ para un cierto ángulo constante α.

i) Considera

$$\begin{aligned} I \times \mathbb{R} &\xrightarrow{\mathbf{x}} \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto \boldsymbol{\gamma}(u) + v\frac{\tau(u)\mathbf{t}(u) + \kappa(u)\mathbf{b}(u)}{\sqrt{\kappa(u)^2 + \tau(u)^2}}. \end{aligned}$$

Demuestra que es una superficie parametrizada y calcula el campo vectorial normal unitario asociado a $\mathbf{x}$. Es útil escribir la expresión anterior usando α.

Solución. Como la curva $\boldsymbol{\gamma}$ debe ser birregular, vamos a suponer que es ppa. Denotemos

$$\mathbf{d} := \frac{\tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \cos\alpha\mathbf{t} + \operatorname{sen}\alpha\mathbf{b}.$$

Tenemos $\boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{t}$ y

$$\mathbf{d}' = (\kappa\cos\alpha - \tau\operatorname{sen}\alpha)\mathbf{n} = 0.$$

Luego si $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, entonces es superficie parametrizada y el vector normal es $\pm\mathbf{n}$. □

ii) Demuestra que $\mathbf{x}$ define una superficie parametrizada cilíndrica.

Solución. Ya hemos visto que $\mathbf{d}$ es constante luego es cilíndrica. □

iii) Considera

$$\begin{aligned} I \times \mathbb{R} &\xrightarrow{\mathbf{y}} \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \boldsymbol{\gamma}(u) + v\mathbf{n}(u). \end{aligned}$$

Demuestra que es una superficie parametrizada y calcula la curva de estricción.

Demostración. Suponemos que la curva es ppa. Tenemos

$$\mathbf{y}_u(u, v) = (1 - v\kappa(u))\mathbf{t}(u) + v\tau(u)\mathbf{b}(u), \quad \mathbf{y}_v(u, v) = \mathbf{n}(u),$$

que son linealmente independientes, luego es superficie parametrizada. La curva de estricción $\boldsymbol{\delta} := \boldsymbol{\gamma} + r\mathbf{n}$ viene dada para

$$r = -\frac{\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle}{\|\mathbf{n}'\|^2} = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}.$$

□

iv) Describe la curva de estricción cuando $\boldsymbol{\gamma}$ es la curva de [**2**]b)iii).

Demostración. Tenemos

$$r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = 2.$$

Así,

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) + 2\mathbf{n}(t) = (t + \sqrt{3}\operatorname{sen} t, 2\cos t, \sqrt{3}\ t - \operatorname{sen} t) + 2 \cdot \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\operatorname{sen} t, -2\cos t, \operatorname{sen} t) = t(1, 0, \sqrt{3}),$$

es decir, se trata de una recta. □