1 Método de Euler implícito

1.1 Un ejemplo académico

Considera el problema

$$(P1)\begin{cases} u_t(x,t) = (1+x^2)\,u_{xx}(x,t) - 3u(x,t), & x \in (0,2), \quad t > 0, \\ u(x,0) = 1+x^2, & x \in [0,2], \\ u(0,t) = \mathrm{e}^{-t}, \quad u(2,t) = 5\mathrm{e}^{-t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Este problema tiene como solución exacta $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t}(1+x^2)$.

1. Discretiza dicho problema utilizando el método de Euler implícito.

   De las condiciones iniciales y de contorno, podemos deducir :

   $$u_i^0 = 1 + x^2 \quad \forall i = 1,...,n+2$$

   $$u_0^{j+1} = e^{-t} \quad \forall j = 1,...,m+1$$

   $$u_2^{j+1} = 5e^{-t} \quad \forall j = 1,...,m+1$$

   Para los nodos interiores aplicamos el método de diferencias centrales implícito:

   $$u_t(x_i,t_j) \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} \quad u_{xx}(x_i,t_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

   Y así, tenemos:

   $$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - (1+x^2)\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + 3u_i^{j+1} = 0$$

   Multiplicamos la ecuación por τ y denotamos $r = \dfrac{\tau}{h^2}$. Así, sustituyendo en la ecuación, obtenemos:

   $$(1 + 2r(1+x^2) + 3r)u_i^{j+1} - r(1+x^2)(u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) = u_i^j$$

2. Realiza los cambios necesarios en el programa calorexplicito.m de forma que el nuevo programa resuelva el problema (P1) por el método de Euler implícito.

3. Completa la siguiente tabla de errores (tfinal=0.01):

$n+1$	$m+1$	Error máximo
10	10	$e_{10,10} = 1.5709e-05$
20	20	$e_{20,20} = 8.0123e-06$
40	40	$e_{40,40} = 4.0348e-06$
80	80	$e_{80,80} = 2.0264e-06$

4. Calcula el orden de convergencia del método.

Veamos cuál es el orden:

$$log_2 \frac{e_{10,10}}{e_{20,20}} = log_2 \frac{1.5709e-05}{8.0123e-06} = 0.9713 \approx 1$$

$$log_2 \frac{e_{20,20}}{e_{40,40}} = log_2 \frac{8.0123e-06}{4.0348e-06} = 0.9897 \approx 1$$

$$log_2 \frac{e_{40,40}}{e_{80,80}} = log_2 \frac{4.0348e-06}{2.0264e-06} = 0.9936 \approx 1$$

Por lo tanto, el orden de convergencia del método es 1.

1.2 Aplicación: La ecuación de Black-Scholes

La ecuación de Black-Scholes describe la evolución de las opciones Europeas. Una opción *call* Europea es un contrato en el que en un momento determinado del futuro T, conocido como fecha de vencimiento, el dueño de la opción puede comprar el activo subyacente por un valor determinado desde el comienzo del contrato, conocido como precio de ejercicio o *strike* K. Si V es el precio de la opción, nosotros queremos encontrar $V(S,t)$, donde S es el precio del activo subyacente. La ecuación de Black-Scholes se escribe como

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0,$$

donde r es el tipo de interés y σ la volatilidad del activo, los cuales se consideran constantes a lo largo de la vida de la opción. El precio de la opción en la fecha de vencimiento $t = T$ es

$$V(S,T) = \max(S-K, 0).$$

Además, si el precio de la acción subyacente es igual a cero, el de la opción también lo es. Por tanto, tenemos que

$$V(0,t) = 0.$$

Por otro lado, si el precio de la acción subyacente incrementa sin ningún límite, el precio de la opción se acercará cada vez más al precio mismo de la acción.

$$\lim_{S\to\infty} V(S,t) = S.$$

Por tanto, el problema a resolver es

$$(P2)\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \quad 0 < S < \infty, \quad 0 \le t < T, \\ V(S,T) = \max(S-K,0), \quad 0 < S < \infty, \\ V(0,t) = 0, \quad 0 \le t < T, \\ \lim_{S\to\infty} V(S,t) = S, \quad 0 \le t < T. \end{cases}$$

1. Realizar el cambio de variable $\tau = T - t$ para transformar el problema (P2) en el siguiente problema

$$(P3)\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \tau} - rS\dfrac{\partial V}{\partial S} - \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rV = 0, \quad 0 < S < \infty, \quad 0 < \tau \le T, \\ V(S,0) = \max(S-K,0), \quad 0 < S < \infty, \\ V(0,\tau) = 0, \quad 0 < \tau \le T, \\ \lim_{S\to\infty} V(S,\tau) = S, \quad 0 < \tau \le T. \end{cases}$$

2. Truncación del dominio. Para resolver por diferencias finitas el problema, sustituimos el dominio $[0,\infty)$ por un intervalo acotado suficientemente grande $[0, S_{max}]$.

$$(P4)\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \tau} - rS\dfrac{\partial V}{\partial S} - \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rV = 0, \quad 0 < S < S_{max}, \quad 0 < \tau \leq T, \\ V(S,0) = \max(S-K,0), \quad 0 < S < S_{max}, \\ V(0,\tau) = 0, \quad 0 < \tau \leq T, \\ V(S_{max},\tau) = S_{max}, \quad 0 < \tau \leq T. \end{cases}$$

3. Prepara un programa que resuelva el problema anterior por el método de Euler implícito.
Aproximamos ahroa la ecuación de (P4) mediante Euler implícito.
Tenemos en cuenta las siguientes aproximaciones:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} \approx \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\tau} \qquad \frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i+1}^{j+1} - V_{i-1}^{j+1}}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V_{i+1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i-1}^{j+1}}{h^2}$$

Ahora, sustituyendo en la ecuación dada, llegamos a que:

$$\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\tau} - rS\frac{V_{i+1}^{j+1} - V_{i-1}^{j+1}}{2h} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{V_{i+1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i-1}^{j+1}}{h^2} + rV = 0$$

Y haciendo cuentas llegamos a que:

$$V_i^j = (1 + r\tau + \frac{\sigma^2 S_i^2 \tau}{h^2})V_i^{j+1} - (\frac{rS_i\tau}{2h} + \frac{\sigma^2 S_i^2 \tau}{2h^2})V_{i+1}^{j+1} + (\frac{rS_i\tau}{2h} - \frac{\sigma^2 S_i^2 \tau}{2h^2})V_{i-1}^{j+1}$$

4. Valora una opción call con una tasa de rentabilidad libre de riesgo del 9%, una volatilidad del 10%, un vencimiento de 9 meses, $T = 9/12$, y un precio de ejercicio, $K = 6$€. Indica el valor de la opción en los siguientes casos de valor del activo

S	4.8	5.4	6	6.6	7.2
V	0.0069	0.1034	0.4531	0.9975	1.5919
$V(Exacta)$	0.0064	0.1038	0.4542	0.9977	1.5919

5. Repite la tabla anterior en el caso de una volatilidad del 20%

S	4.8	5.4	6	6.6	7.2
V	0.0902	0.2843	0.6258	1.0893	1.6281
$V(Exacta)$	0.0902	0.2846	0.6263	1.0897	1.6282

Observar que el precio de la opción aumenta a medida que crece la volatilidad.