# 1 Resultados sobre la solución de una ecuación parabólica lineal general

Se considera un problema parabólico lineal general con condiciones de contorno de tipo Dirichlet,

$$(\mathrm{PP}) \left\{ \begin{array}{l} u_t(x,t) = p(x,t)\, u_{xx}(x,t) + r(x,t)u(x,t) + s(x,t), \quad x \in (a,b), \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in [a,b], \\ u(a,t) = g_1(t),\ u(b,t) = g_2(t), \quad t \geq 0, \end{array} \right.$$

donde se supone que las funciones $p(x,t), r(x,t)$ y $s(x,t)$ son continuas y acotadas en $D = \{(x,t)\,/\,a \leq x \leq b,\, t \geq 0\}$ con $p(x,t) > 0$ y $r(x,t) \leq 0$ en $D$. Además, se verifica $g_1(0) = f(a)$ y $g_2(0) = f(b)$.

**Proposición 1** *Si en el problema* (PP) $p(x,t) \geq v > 0$ *y* $r(x,t) \leq 0$*, entonces existe una única solución. Además, (principio del máximo):*

1. *si* $s(x,t) \equiv 0$ *entonces en el rectángulo* $[a,b] \times [0,T]$ *no puede haber ni máximos positivos ni mínimos negativos fuera de los valores iniciales y de contorno.*
2. *si* $s(x,t) \equiv r(x,t) \equiv 0$ *entonces en el rectángulo* $[a,b] \times [0,T]$ *no puede haber ni máximos ni mínimos fuera de los valores iniciales y de contorno.*

# 2 Métodos en diferencias

Partiremos de las siguientes hipótesis: existen $V$ y $N$ constantes tales que en $[a,b] \times [0,T]$

- $0 < p(x,t) \leq V$,
- $-N \leq r(x,t) \leq 0$.

## 2.1 Método de Euler explícito

Las diferentes derivadas son aproximadas por las siguientes fórmulas:

$$u_t(x_i,t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k},$$
$$u_{xx}(x_i,t_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}.$$

**Proposición 2** *Se considera el problema (PP) con* $s(x,t) \equiv 0$*. Si* $k \leq \dfrac{h^2}{Nh^2 + 2V}$*, entonces la solución numérica de (PP) obtenida con el método de Euler explícito posee la propiedad del máximo discreto.*

### 2.2 Método de Euler implícito

Las derivadas son aproximadas por las siguientes fórmulas:

$$u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k},$$
$$u_{xx}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2},$$

**Proposición 3** *Sea el problema (PP) definido en $[a,b] \times [0,T]$ con $s(x,t) \equiv 0$. La solución numérica de (PP) obtenida por el método de Euler implícito posee la propiedad del máximo discreto independientemente de los pasos de discretización en espacio y tiempo elegidos.*

## 3 Preliminares

La notación que se va a usar en esta práctica es la siguiente:

- Extremos inferior y superior del intervalo de trabajo en la variable espacial: $a$ y $b$.
- Tiempo inicial y tiempo final: 0 y $tfinal$.
- Número de subintervalos en la dirección espacial: $n$, con paso de discretización $h$.
- Número de subintervalos en la dirección temporal: $m$, con paso de discretización $k$.

El esquema básico utilizado para resolver numéricamente este problema se puede escribir en pseudocódigo como:

Inicialización
**do** tiempo inicial **hasta** tiempo final
  **call** resolver
  **do** uold = unew
**end do.**

En la parte de inicialización se definen los parámetros $a, b, n, \ldots$ , así como las condiciones inicial y de contorno.
A continuación se entra en un bucle desde el instante inicial hasta que se alcanza el instante final avanzando con paso de discretización temporal $k$. En cada etapa de este proceso repetitivo se calcula *unew*, solución numérica en el nuevo nivel de tiempo. La manera de calcularlo depende del problema a resolver y del esquema de diferencias finitas considerado.
A continuación se actualizan los valores *unew*, ya que éstos serán *uold* en el siguiente nivel temporal.
Finalmente para cada nivel de tiempo se calcularía el máximo error cometido y se dibujarían los resultados obtenidos.

# 4 Ejercicios propuestos

## 4.1 Problema de difusión

Considera el problema

$$(\mathrm{P1}) \begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(x,0) = sen\,(\pi x), & x \in [0,1], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

La única solución del problema anterior es la función $u(x,t) = \mathrm{e}^{-\pi^2 t} sen\,(\pi x)$.

1. Utiliza el método explícito para discretizar el problema y expresa $u_i^j$ en función de los valores $u_{i-1}^{j-1}$, $u_i^{j-1}$ y $u_{i+1}^{j-1}$, donde $u_i^j$ denota la solución numérica en el punto $(x_i, t_j)$.

   Por las condiciones de contorno e inicial, deducimos:

   $$u_0^j = u_1^j = 0 \quad \forall j = 1, ..., m+1$$

   $$u_i^0 = sen(\pi x_i) \quad \forall i = 1, ..., n+2$$

   Notar ahora que para cada nodo interior tenemos:

   $$u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} \quad u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

   Susitituyendo en la ecuación de (P1), obtenemos:

   $$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} - \frac{u_{i-1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i+1}^{j-1}}{h^2} = 0$$

   Despejando:

   $$u_i^j = \frac{\tau}{h^2} u_{i-1}^{j-1} + \frac{\tau}{h^2} u_{i+1}^{j-1} + (1 - \frac{2\tau}{h^2}) u_i^{j-1}$$

   Para simplificar, denoto $r = \dfrac{\tau}{h^2}$ y así obtengo:

   $$u_i^j = r u_{i-1}^{j-1} + r u_{i+1}^{j-1} + (1 + 2r) u_i^{j-1}$$

   (Notar que, por teoría, estamos utilizando la siguiente notación: $h = \dfrac{b-a}{n+1}$ y $\tau = k = \dfrac{T_{final} - 0}{m+1}$)

2. Comprueba que la condición del máximo discreto del método es $k \leq \dfrac{h^2}{2}$.

   Vamos a aplicar la proposición 2.
   Tenemos que $p(x,t) = 1$, $r(x,t) = s(x,t) = 0$, luego buscamos $V$ y $N$ de forma que:

   $$0 < p(x,t) \leq V \Rightarrow V = 1$$

$$-N \leq r(x,t) \leq 0 \Rightarrow N = 1$$

Así pues, tenemos $k \leq \dfrac{h^2}{Nh^2 + 2V} = \dfrac{h^2}{2}$. Ya tenemos que se cumplen las hipótesis de la *Proposición 2*, y podemos asegurar que la solución numérica de (P1) posee la propiedad del máximo discreto.
Además, como tenemos que $s(x,t) = r(x,t) = 0$, por el *Principio del Máximo*, sabemos que en el rectángulo [0,1]x[0,T] no puede haber ni mínimos ni máximos fuera de los valores iniciales y de contorno.

3. Edita el fichero **calorexplicito.m**. Identifica cada una de las sentencias descritas en el pseudocódigo anterior y observa que este programa resuelve numéricamente el problema (P1) por el método explícito.

4. Resuelve el problema en $tfinal = 0.1$ y representa gráficamente las soluciones en los siguientes casos:

   (a) $n = m = 20$.

   (b) $n = 20$, $m = 100$.

   Analiza los resultados obtenidos.

   Ejecutamos el código con los valores $n = 20$ y $m = 20$, y observamos que el error máximo es elevado y la gráfica no es buena, de manera que, cuanto mayor es el tiempo, peor es la gráfica.

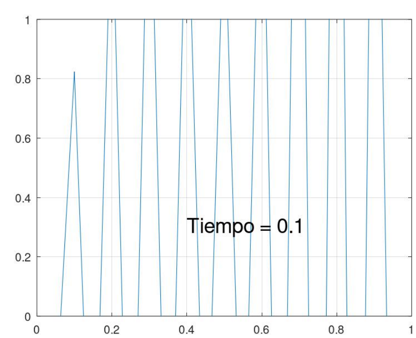



Figure 1: $n = 20$ y $m = 20$

Por otro lado, si cambiamos el valor de $m$ y ponemos $m = 100$ como en el apartado $b$, el error máximo es bastante pequeño y la gráfica es bastante buena.

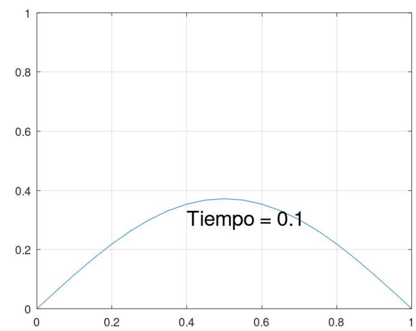



Figure 2: $n = 20$ y $m = 100$

Esto se debe a que en teoría hemos visto que el esquema de Euler explícito presenta estabilidad si se cumple la condición: $\frac{2k}{h^2} \leq 1$. Si sustituimos los valores de $h$ y $k$ de ambos apartados, se puede observar que en el primero, la desigualdad no se cumple, pero en el segundo sí, que es lo que hemos visto.

5. Completa una tabla de errores con $tfinal = 0.1$ y justifica la reducción de errores que se produce.

Para que se cumpla la condición de estabilidad $\frac{2k}{h^2} \leq 1$, cada vez que duplique le valor de $n + 1$, multiplicaré por 4 el valor de $m + 1$, de esta manera, se cumplirá la desigualdad.

| $n + 1$ | $m + 1$ | Error máximo |
|---|---|---|
| 20 | 100 | 0.0011 |
| 10 | 20 | 0.0062 |
| 20 | 80 | 0.0015 |
| 40 | 320 | 3.7861e-04 |
| 80 | 1280 | 9.4572e-05 |
| 160 | 5120 | 2.3638e-05 |
| 320 | 20480 | 5.9091e-06 |

Notar que el error cada vez es menor, esto se debe a que el cociente $\frac{2k}{h^2}$ cada vez es más pequeño, luego la condición de estabilidad $\frac{2k}{h^2} \leq 1$ siempre se va a cumplir, es decir, el sistema es cada vez más estable.

## 4.2 Problema de reacción–difusión evolutivo

Considera el problema

$$
(\mathrm{P2}) \begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 3u(x,t), \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 0.5, \\ 0, & x > 0.5 \end{cases} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}
$$

1. Utiliza el método explícito para discretizar el problema y expresa $u_i^j$ en función de los valores $u_{i-1}^{j-1}$, $u_i^{j-1}$ y $u_{i+1}^{j-1}$, donde $u_i^j$ denota la solución numérica en el punto $(x_i, t_j)$.

   Volvemos a aplicar el método de diferencias explícito y obtenemos que, por las condiciones inicial y de contorno, sabemos que:

$$u_i^0 = 1 \quad x_i \in [0, 0.5] \quad \forall i = 1, ..., n+2$$

$$u_i^0 = 0 \quad x_i \in (0.5, 1] \quad \forall i = 1, ..., n+2$$

$$u_0^j = u_1^j = 0 \quad \forall j = 1, ..., m+1$$

   Para los nodos interiores, tenemos que :

$$u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} \quad u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

   Sustituyendo en la ecuación del problema:

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} - \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2} + 3u_i^{j-1} = 0$$

   Despejando $u_i^j$:

$$u_i^j = \frac{\tau}{h^2}u_{i+1}^{j-1} + \frac{\tau}{h^2}u_{i-1}^{j-1} + (-\frac{2\tau}{h^2} - 3\tau + 1)u_i^{j-1}$$

   Denoto $r = \dfrac{\tau}{h^2}$:

$$u_i^j = ru_{i+1}^{j-1} + ru_{i-1}^{j-1} + (-2r - 3\tau + 1)u_i^{j-1}$$

2. Indica la condición del máximo discreto del método para este problema.

   Observar que en (P2), tenemos $p(x,t) = 1$, $r(x,t) = -3$ y $s(x,t) = 0$. Buscamos valores de $V$ y $N$ que cumplan las siguientes hipótesis:

$$0 < p(x,t) \leq V \Rightarrow V = 1$$

$$-N \leq r(x,t) \leq 0 \Rightarrow N = 3$$

   Así pues, por la *Proposición 2*, tenemos que si $k \leq \dfrac{h^2}{Nh^2 + 2V} = \dfrac{h^2}{3h^2 + 2}$, entonces la solución numérica de (P2) obtenida mediante el método de Euler explícito posee la propiedad del máximo discreto.
   Es decir, la condición del máximo discreto del método para este problema es:

$$k \leq \frac{h^2}{3h^2 + 2}$$

   donde $k = \tau = \dfrac{T_{final} - 0}{m+1}$ y $h = \dfrac{b-a}{n+1}$.
   Además, por el *Principio del máximo*, como $s(x,t) = 0$, podemos asegurar que en el rectángulo [0,1]x[0,T] no puede haber ni máximos positivos ni mínimos negativos fuera de los valores iniciales y de contorno.

3. Realiza los cambios necesarios en el programa **calorexplicito.m** de forma que el nuevo programa resuelva el problema (P2) por el método explícito.

4. Se quiere hacer una simulación del problema hasta el tiempo $tfinal = 0.1$. Resuelve el problema y representa gráficamente la solución obtenida.
   Veamos qué pasa cuando ponemos los valores $n = m = 20$ :

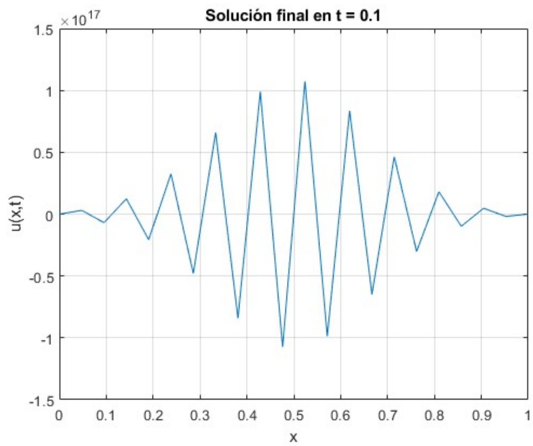



Figure 3: n=20 y m=20

Se puede observar que la gráfica no tiene estabilidad, luego probamos para distintos valores de n y m, por ejemplo, para $n = 20$ y $m = 100$:

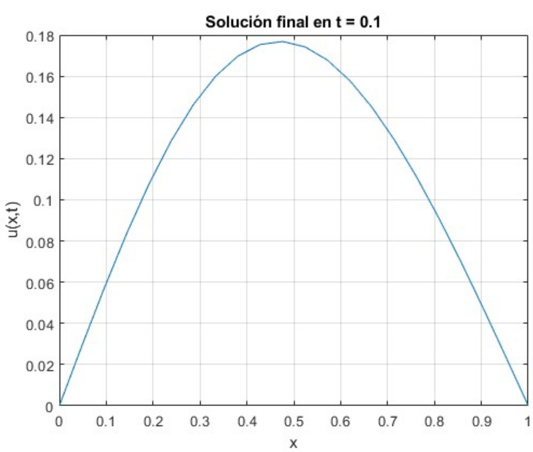



Figure 4: n=20 y m=100

Ahora ya vemos que la gráfica es más estable, esto es porque estos valores cumplen la ecuación $\frac{2k}{h^2} \leq 1$. Luego, seguimos dando valores que lo cumplan (si cada vez que duplicamos $n$ , multiplicamos $m$ por 4, se sigue cumpliendo la desigualdad):

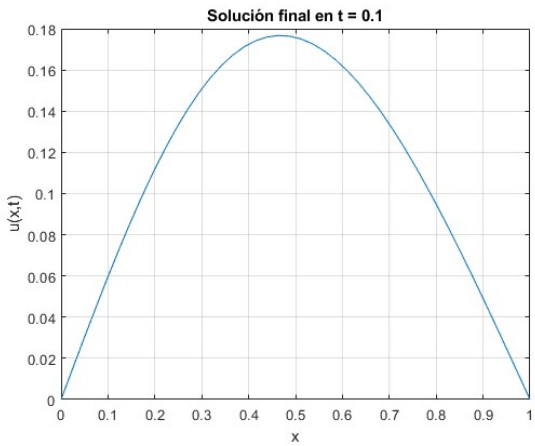



Figure 5: n=40 y m=400

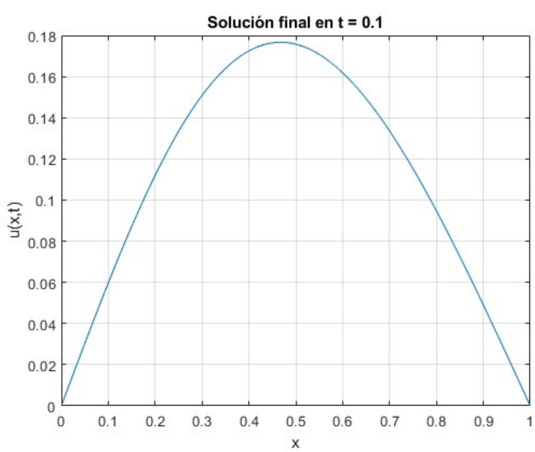



Figure 6: n=80 y m=1600

## 4.3 Aplicación a procesamiento de imágenes. Eliminación de ruido.

Es bien conocido que la ecuación de difusión (o del calor) produce un efecto de suavizado sobre la condición inicial. Esta propiedad puede ser utilizada en el tratamiento de imágenes, y a continuación vamos a estudiar su posible aplicación en este campo. En particular, la ecuación de difusión puede ser útil para eliminar el ruido en una imagen. El ruido en una imagen puede aparecer en muchas situaciones, especialmente en imágenes de la tierra realizadas por satélites, en imágenes del universo tomadas por telescopios o simplemente puede aparecer debido a que los canales en los que las señales se transmiten producen ruidos.

Consideremos que la función $u(x, y, t)$ representa la evolución en tiempo de una imagen. Una imagen digital en blanco y negro es esencialmente una matriz $m \times n$ con valores que oscilan entre el negro (0) y el blanco (255). Así pues, vamos a considerar $u(x, y)$ la representación de la imagen dada en la Figura 7 (a), a la que le hemos añadido un 16 por ciento de ruido aleatorio, como podemos ver en la imagen mostrada en la Figura 7 (b) que representaremos como $ur(x, y)$.

Nuestro objetivo será eliminar el ruido, y recuperar la imagen original. Para ello, consideramos

(a) (b)

Figure 7: (a) Imagen original. (b) Imagen con ruido.

el siguiente problema

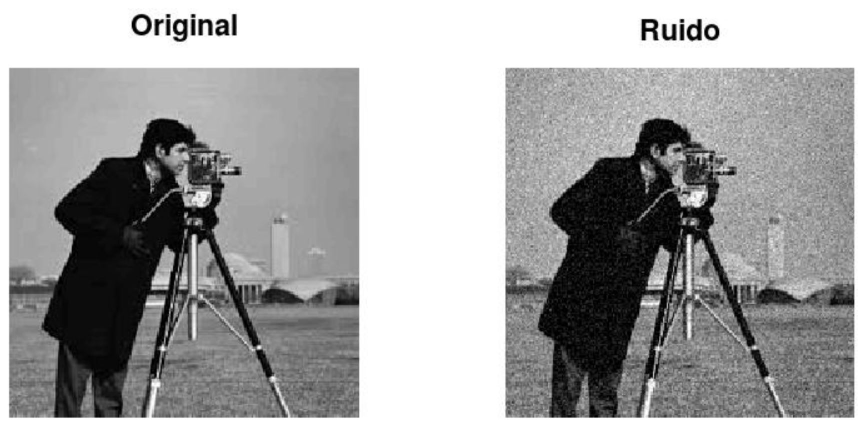
$$(PI)\begin{cases} u_t = c\Delta u, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, y, 0) = ur(x, y), \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

Como podéis observar, es habitual suponer condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneas puesto que esto indica una estabilización local de la intensidad de la imagen en la dirección perpendicular a $\Omega$.

La solución del problema (PI) puede ser obtenida aplicando un método de diferencias finitas explícito:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n} + r(u_{i-1,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n} + u_{i,j-1}^{n} - 4u_{ij}^{n}), \quad r = \frac{ck}{h^2}$$

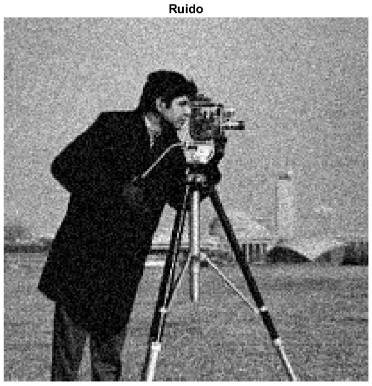
La malla queda determinada por la resolución de la imagen, y en este caso es $204 \times 204$. Se propone que completéis el programa **denoising.m** de forma que se resuelva el problema utilizando dicho esquema, para obtener una imagen sin ruido.



Original

Denoising

Ruido



Denoising