1. Condiciones de tipo Neumann y tipo Robin

En este ejercicio vamos a modificar el programa de forma que resuelva el siguiente problema de contorno con condiciones de contorno Neumann y Robin:

$$(\text{P1}) \begin{cases} -u''(x) + u(x) = x, \quad x \in (0,1), \\ u'(0) = 1, \\ u'(1) + u(1) = 1. \end{cases}$$

1. Se considera una aproximación de primer orden en las condiciones de contorno. Utiliza el método de diferencias finitas para discretizar el problema (P1) e indica cuáles son los elementos no nulos de la matriz del sistema lineal que resulta, así como su vector de términos independientes.

$$\begin{aligned} &matriz(i,i-1) = -\frac{1}{h^2} \\ &matriz(i,i) = 1 + 2\frac{1}{h^2} \\ &matriz(i,i+1) = -\frac{1}{h^2} \\ &b(i) = x(i) \qquad\qquad\qquad\qquad i = 2\ ,\dots, n+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &matriz(1,1) = \frac{1}{h^2} \\ &matriz(1,2) = -\frac{1}{h^2} \\ &b(1) = -\frac{1}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &matriz(n+2,n+2) = \frac{1}{h^2}(1+h) \\ &matriz(n+2,n+1) = -\frac{1}{h^2} \\ &b(n+2) = \frac{1}{h} \end{aligned}$$

2. Modifica convenientemente el programa **difusion.m** y completa la siguiente tabla:

$n+1$	Error máximo	Error en norma dos
10	$e_{10} = 0.03074341$	$e_{10} = 2.682933734582559e-02$
20	$e_{20} = 1.488317626181068e-02$	$e_{20} = 1.268387432531525e-02$
40	$e_{40} = 7.323847694868879e-03$	$e_{40} = 6.165673636490974e-03$
80	$e_{80} = 3.633016850533854e-03$	$e_{80} = 3.039536005452897e-03$
160	$e_{160} = 1.809346442850079e-03$	$e_{160} = 1.509036064797922e-03$

3. Utiliza la tabla anterior para deducir el orden de convergencia.
   Para la norma infinito:

$$log_2\frac{e_{10}}{e_{20}} = log_2\frac{3.074341425352933e-02}{1.488317626181068e-02} = 1.046594945435408 \approx 1$$

$$log_2 \frac{e_{20}}{e_{40}} = log_2 \frac{1.488317626181068e-02}{7.323847694868879e-03} = 1.023008754447225 \approx 1$$

$$log_2 \frac{e_{40}}{e_{80}} = log_2 \frac{7.323847694868879e-03}{3.633016850533854e-03} = 1.011433732249947 \approx 1$$

$$log_2 \frac{e_{80}}{e_{160}} = log_2 \frac{3.633016850533854e-03}{1.809346442850079e-03} = 1.005699384189110 \approx 1$$

Ahora, para la norma 2, realizamos las mismas cuentas:

$$log_2 \frac{e_{10}}{e_{20}} = log_2 \frac{2.682933734582559e-02}{1.268387432531525e-02} = 1.080815934031112 \approx 1$$

$$log_2 \frac{e_{20}}{e_{40}} = log_2 \frac{1.268387432531525e-02}{6.165673636490974e-03} = 1.040665056717675 \approx 1$$

$$log_2 \frac{e_{40}}{e_{80}} = log_2 \frac{6.165673636490974e-03}{3.039536005452897e-03} = 1.020407417618859$$

$$log_2 \frac{e_{80}}{e_{160}} = log_2 \frac{3.039536005452897e-03}{1.509036064797922e-03} = 1.010223823053260 \approx 1$$

Por lo tanto, ya tenemos que el orden de convergencia es 1.

4. Ahora se considera la aproximación de segundo orden para las condiciones de contorno. Utiliza el método de diferencias finitas para discretizar el problema (P1) e indica cuáles son los elementos no nulos de la matriz del sistema lineal que resulta, así como su vector de términos independientes.

$$matriz(i,i-1) = -\frac{1}{h^2}$$
$$matriz(i,i) = 2\frac{1}{h^2} + 1$$
$$matriz(i,i+1) = -\frac{1}{h^2}$$
$$b(i) = x(i) \qquad\qquad i = \ 2, \ldots, n+1.$$

$$matriz(1,1) = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}$$
$$matriz(1,2) = -\frac{1}{h^2}$$
$$b(1) = \frac{x(1)}{2} - \frac{1}{h}$$

$$matriz(n+2,n+2) = \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + \frac{1}{h^2}$$
$$matriz(n+2,n+1) = -\frac{1}{h^2}$$
$$b(n+2) = \frac{x(n+2)}{2} + \frac{1}{h}$$

5. Modifica convenientemente el programa **difusion.m** y completa la siguiente tabla:

$n+1$	Error máximo	Error en norma dos
10	$e_{10} = 2.5006e-4$	$e_{10} = 1.379986922720795e-04$
20	$e_{20} = 6.257622864541679e-05$	$e_{20} = 3.289525768687975e-05$
40	$e_{40} = 1.564788866670330e-05$	$e_{40} = 8.022237689493712e-06$
80	$e_{80} = 3.912211720413783e-06$	$e_{80} = 1.980317375416185e-06$
160	$e_{160} = 9.780679079973709e-07$	$e_{160} = 4.919218785919479e-07$

6. Utiliza la tabla anterior para deducir el orden de convergencia.
Para la norma infinito:

$$log_2\frac{e_{10}}{e_{20}} = log_2\frac{2.5006e-4}{6.257622864541679e-05} = 1.998587682428030 \approx 2$$

$$log_2\frac{e_{20}}{e_{40}} = log_2\frac{6.257622864541679e-05}{1.564788866670330e-05} = 1.999646701817504 \approx 2$$

$$log_2\frac{e_{40}}{e_{80}} = log_2\frac{1.564788866670330e-05}{3.912211720413783e-06} = 1.999911657753735 \approx 2$$

$$log_2\frac{e_{80}}{e_{160}} = log_2\frac{3.912211720413783e-06}{9.780679079973709e-07} = 1.999977906750065 \approx 2$$

Ahora, hacemos lo mismo para la norma 2:

$$log_2 \frac{e_{10}}{e_{20}} = log_2 \frac{1.379986922720795e-04}{3.289525768687975e-05} = 2.068703076219557 \approx 2$$

$$log_2 \frac{e_{20}}{e_{40}} = log_2 \frac{3.289525768687975e-05}{8.022237689493712e-06} = 2.035802996950634 \approx 2$$

$$log_2 \frac{e_{40}}{e_{80}} = log_2 \frac{8.022237689493712e-06}{1.980317375416185e-06} = 2.018273049900170 \approx 2$$

$$log_2 \frac{e_{80}}{e_{160}} = log_2 \frac{1.980317375416185e-06}{4.919218785919479e-07} = 2.009230535710166 \approx 2$$

Así, ya hemos visto que el orden de convergencia del método es 2.

2. Problema de difusión con coeficientes no constantes

Se considera el problema:

$$(\text{P2}) \begin{cases} -(k(x)u'(x))' = f(x), & x \in (1,2), \\ u(1) = \alpha, \\ u(2) = \beta. \end{cases}$$

1. Considerando $k(x) = x$, y con el objetivo de verificar que el código funciona correctamente, elige $f(x)$, α y β de forma que la solución analítica del problema (P2) sea la función $u(x) = x^4 + x^2$.

   Para hallar el valor de $f(x)$, sustituimos $u(x) = x^4 + x^2$ en la ecuación de (P2).
   Notar que $u(x) = x^4 + x^2 \Rightarrow u'(x) = 4x^3 + 2x$
   Así pues:

   $$-(xu'(x))' = -(x(4x^3+2x))' = -(4x^4+2x^2)' = -(16x^3+4x) = -16x^3 - 4x = f(x)$$

   Ahora, para calcular α y β, sustituimos la solución $u(x)$ para los valores $x = 1$ y $x = 2$:

   $$u(1) = 1 + 1 = 2 = \alpha$$

   $$u(2) = 2^4 + 2^2 = 16 + 4 = 20 = \beta$$

2. Utiliza el método de diferencias finitas para discretizar el problema (P2) e indica cuáles son los elementos no nulos de la matriz del sistema lineal que resulta, así como su vector de términos independientes.

   $$\left.\begin{array}{l} matriz(i,i-1) = -\dfrac{1}{h^2}\dfrac{x(i)+x(i-1)}{2} \\ matriz(i,i) = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{x(i)+x(i+1)}{2} + \dfrac{x(i)+x(i-1)}{2}\right) \\ matriz(i,i+1) = -\dfrac{1}{h^2}\dfrac{x(i)+x(i+1)}{2} \\ b(i) = -16x(i)^3 - 4x(i) \end{array}\right. \qquad i = 2, \ldots, n.$$

3. Modifica el fichero **difusion.m** adecuadamente de forma que resuelva el problema (P2).

4. Completa la siguiente tabla:

$n+1$	Error máximo
10	$e_{10} = 0.007570162$
20	$e_{20} = 1.896013476200942e-03$
40	$e_{40} = 4.748497130586671e-04$
80	$e_{80} = 1.187148017463002e-04$
160	$e_{160} = 2.968002817471671e-05$

5. Indica el orden del método.

   Para ver el orden del método, realizamos el logaritmo en base 2 del cociente entre un error máximo y el error máximo con el doble de nodos, es decir: $\log_2 \frac{e_{10}}{e_{20}}$, $\log_2 \frac{e_{20}}{e_{40}}$, $\log_2 \frac{e_{40}}{e_{80}}$, y así sucesivamente. Realizando estas operaciones, obtenemos que el método es de orden 2:

$$\log_2 \frac{e_{10}}{e_{20}} = log_2 \frac{7.570162646395318e-03}{1.896013476200942e-03} = 1.997355078678851 \approx 2$$

$$\log_2 \frac{e_{20}}{e_{40}} = log_2 \frac{1.896013476200942e-03}{4.748497130586671e-04} = 1.997426331535013 \approx 2$$

$$log_2 \frac{e_{40}}{e_{80}} = log_2 \frac{4.748497130586671e-04}{1.187148017463002e-04} = 1.999971155707944 \approx 2$$

$$log_2 \frac{e_{80}}{e_{160}} = log_2 \frac{1.187148017463002e-04}{2.968002817471671e-05} = 1.999935459492556 \approx 2$$

3. Problema de convección-difusión

Se considera el problema:

$$(\mathrm{P3})\begin{cases} -\dfrac{1}{100}u''(x)+u'(x)=0, \quad x\in(0,1), \\ u(0)=0, \\ u(1)=1. \end{cases}$$

1. Comprueba que la solución de este problema es la función

$$u(x)=\frac{\mathrm{e}^{100(x-1)}-\mathrm{e}^{-100}}{1-\mathrm{e}^{-100}}.$$

   Comprueba que el mínimo y máximo de esta función se alcanzan en el contorno.

   Comprobamos primero que la función $u(x)$ es solución de (P3), para ello queremos ver que cumple la ecuación del problema y las condiciones de contorno.
   Observar que:

$$u(x)=\frac{\mathrm{e}^{100(x-1)}-\mathrm{e}^{-100}}{1-\mathrm{e}^{-100}} \Rightarrow u'(x)=\frac{100\mathrm{e}^{100(x-1)}}{1-\mathrm{e}^{-100}} \Rightarrow u''(x)=\frac{100^2\mathrm{e}^{100(x-1)}}{1-\mathrm{e}^{-100}}$$

   Por lo tanto:

$$-\frac{1}{100}\frac{100^2\mathrm{e}^{100(x-1)}}{1-\mathrm{e}^{-100}}+\frac{100\mathrm{e}^{100(x-1)}}{1-\mathrm{e}^{-100}}=-\frac{100\mathrm{e}^{100(x-1)}}{1-\mathrm{e}^{-100}}+\frac{100\mathrm{e}^{100(x-1)}}{1-\mathrm{e}^{-100}}=0$$

   es decir, se cumple la ecuación del problema.
   Veamos si cumple las condiciones iniciales:

$$u(0)=\frac{\mathrm{e}^{100(0-1)}-\mathrm{e}^{-100}}{1-\mathrm{e}^{-100}}=\frac{\mathrm{e}^{-100}-\mathrm{e}^{-100}}{1-\mathrm{e}^{-100}}=\frac{0}{1-\mathrm{e}^{-100}}=0$$

$$u(1)=\frac{\mathrm{e}^{100(1-1)}-\mathrm{e}^{-100}}{1-\mathrm{e}^{-100}}=\frac{\mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{-100}}{1-\mathrm{e}^{-100}}=\frac{1-\mathrm{e}^{-100}}{1-\mathrm{e}^{-100}}=1$$

   Por lo tanto, como la solución $u(x)$ cumple tanto la ecuación del problema como las condiciones iniciales, tenemos que es solución de (P3).

   Veamos ahora dónde alcanza $u(x)$ su máximo y su mínimo.
   Para ello, hacemos $u(x)=0$:

$$u'(x)=\frac{100\mathrm{e}^{100(x-1)}}{1-\mathrm{e}^{-100}}=0 \Rightarrow 100\mathrm{e}^{100(x-1)}=0 \Rightarrow \mathrm{e}^{100(x-1)}=0$$

   Pero sabemos que la función exponencial nunca se anula, por lo que no hay puntos críticos dentro de (0,1). Así pues, deducimos que los puntos críticos van a estar en los extremos. Al ser $u'(x)$ una función exponencial, es una función creciente, por lo que el máximo se alcanzará en $x=1$ y el mínimo en $x=0$, con valores 1 y 0, respectivamente.

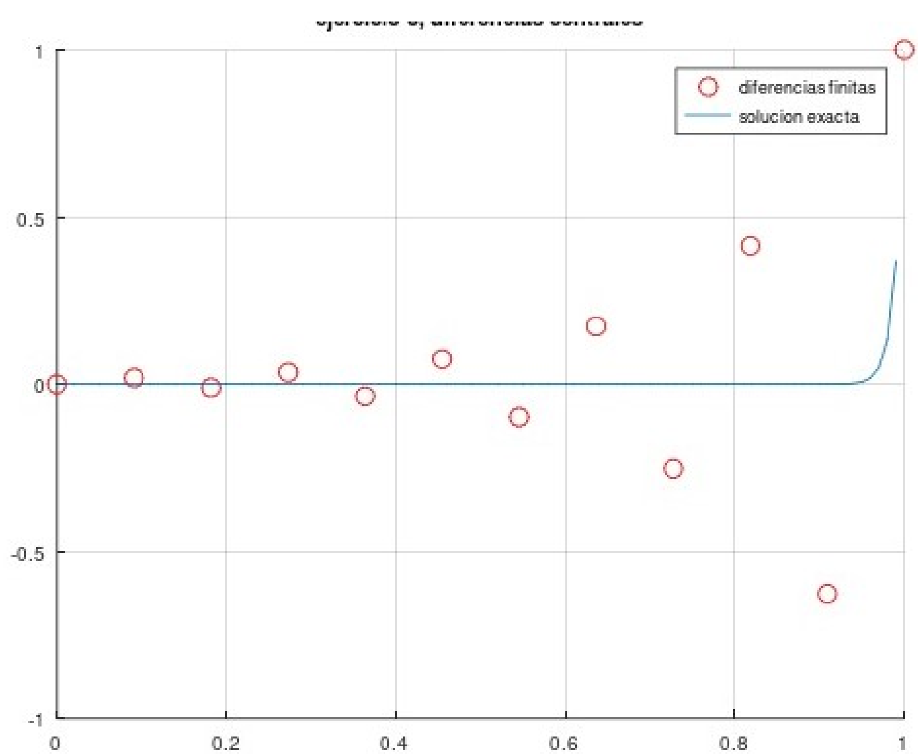
2. Utiliza el método de diferencias centrales para discretizar el problema (P3) e indica cuáles son los elementos no nulos de la matriz del sistema lineal que resulta, así como su vector de términos independientes.

$$\left.\begin{array}{l} matriz(i,i-1) = \dfrac{1}{h^2}(-\dfrac{1}{100} - \dfrac{h}{2}) \\ matriz(i,i) = 2\dfrac{1}{100}\dfrac{1}{h^2} \\ matriz(i,i+1) = \dfrac{1}{h^2}(-\dfrac{1}{100} + \dfrac{h}{2}) \\ b(i) = 0 \\ b(n+1) = \dfrac{\epsilon}{h^2} - \dfrac{1}{2h} \end{array}\right. \qquad i = 2, \ldots, n.$$

3. Modifica el fichero **difusion.m** adecuadamente de forma que resuelva el problema (P3) por el método de diferencias centrales. Ejecuta el programa para $n = 10$.

   ¿Dónde alcanza la solución numérica el máximo y el mínimo ? Construye una malla de forma que el método sea estable en la norma del máximo.

   A la vista del gráfico obtenido con el valor $n = 10$, podemos comprobar que el máximo se alcanza en 1, es decir, en el contorno; pero el mínimo se alcanza en el interior.



   Notar ahora, que en clase de teoría vimos que este esquema es estable si $-(\dfrac{\epsilon}{h^2} - \dfrac{1}{2h}) \leq 0$, donde, en nuestro caso, tenemos que $\epsilon = \dfrac{1}{100}$.

Así pues:

$$-(\frac{\epsilon}{h^2} - \frac{1}{2h}) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\epsilon}{h^2} - \frac{1}{2h} > 0 \Leftrightarrow \frac{\epsilon}{h^2} > \frac{1}{2h} \Leftrightarrow h < 2\epsilon = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0.02$$

Es decir, para que el sistema sea estable, hay que construir un mallado uniforme de paso menor que 0.02.
Además sabemos que $h = \dfrac{1}{n+1}$, por lo tanto, debe cumplirse:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{50} \Rightarrow n > 49$$

Luego, en el mallado debe haber como mínimo 50 nodos.

4. Completa la siguiente tabla:

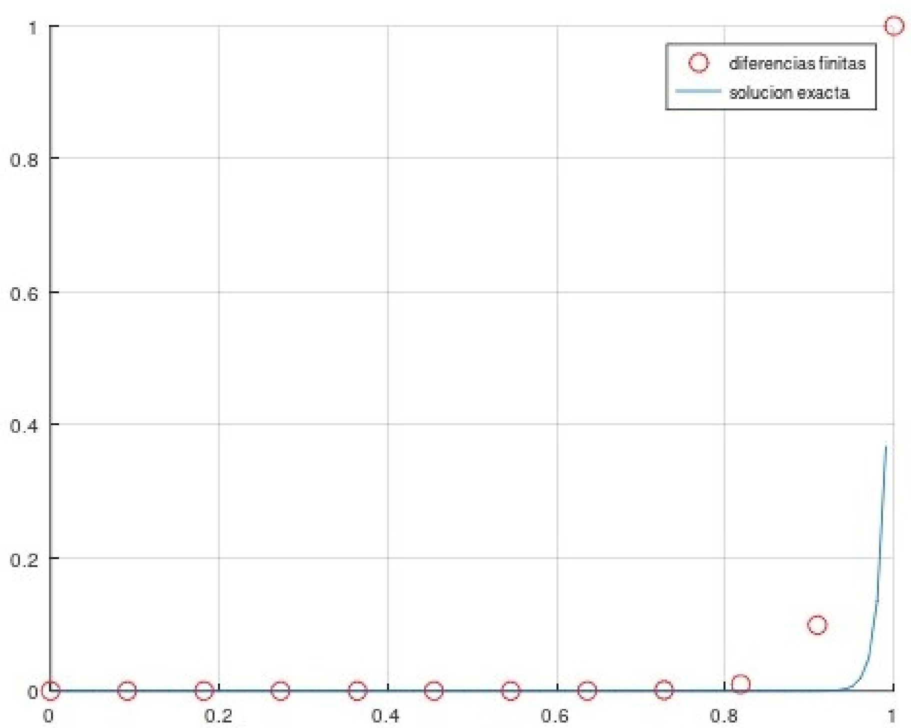
$n+1$	Error máximo
10	$e_{10} = 0.696124$
20	$e_{20} = 0.435309437996624$
40	$e_{40} = 0.193196109735011$
80	$e_{80} = 5.573556609096067e-02$
160	$e_{160} = 1.212837962663138e-02$

5. Utiliza el método upwind para discretizar el problema (P3) e indica cuáles son los elementos no nulos de la matriz del sistema lineal que resulta, así como su vector de términos independientes.

$$\begin{aligned}
&matriz(i,i-1) = -\frac{1}{h^2}(\epsilon + h) \\
&matriz(i,i) = \frac{1}{h^2}(2\epsilon + h) \\
&matriz(i,i+1) = -\frac{1}{h^2}\epsilon \qquad\qquad i = 2, \ldots, n. \\
&b(i) = 0 \\
&b(n+1) = \epsilon\frac{1}{h^2}
\end{aligned}$$

6. Modifica el fichero **difusion.m** adecuadamente de forma que resuelva el problema (P3) por el método upwind. Ejecuta el programa para $n = 10$. ¿Dónde alcanza la solución numérica los valores máximos y mínimos ? Si ejecutamos el código con el valor $n = 10$,

obtenemos una gráfica donde se ve claramente que el máximo se alcanza en 1 y el mínimo en 0, es decir, ambos se alcanzan en el contorno.



7. Completa la siguiente tabla e indica el orden de convergencia

$n+1$	Error máximo
40	$e_{40} = 0.2036292870$
80	$e_{80} = 0.157939647584253$
160	$e_{160} = 9.219342799187913e-02$
320	$e_{320} = 5.067922377131429e-02$
640	$e_{640} = 2.698295524817379e-02$

Veamos ahora el orden de convergencia:

$$log_2 \frac{e_{40}}{e_{80}} = log_2 \frac{0.2036292870}{0.157939647584253} = 0.366571695728651$$

$$log_2 \frac{e_{80}}{e_{160}} = log_2 \frac{0.157939647584253}{9.219342799187913e-02} = 0.776637559425473$$

$$log_2 \frac{e_{160}}{e_{320}} = log_2 \frac{9.219342799187913e-02}{5.067922377131429e-02} = 0.863269484210920$$

$$log_2 \frac{e_{320}}{e_{640}} = log_2 \frac{5.067922377131429e-02}{2.698295524817379e-02} = 0.909346062693351$$

Se puede observar que el orden de convergencia cada vez se aproxima más a 1.