

1. Problema de difusión

Se considera el problema:

$$(P1) \begin{cases} -u''(x) = \pi^2 \text{sen}(\pi x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

1. Comprueba que la solución exacta de este problema es $u(x) = \text{sen}(\pi x)$.

Veamos que la solución $u(x) = \text{sen}(\pi x)$ cumple tanto la ecuación de (P1) como las condiciones de contorno:

$$u'(x) = \pi \cos(\pi x)$$

$$u''(x) = -\pi^2 \text{sen}(\pi x) \Rightarrow -u''(x) = \pi^2 \text{sen}(\pi x)$$

$$u(0) = \text{sen}(0) = 0$$

$$u(1) = \text{sen}(\pi) = 0$$

Luego, ya hemos comprobado que la solución dada es solución del problema, que es lo que queríamos ver.

2. Utiliza el método de diferencias finitas para discretizar el problema (P1) e indica cuáles son los elementos no nulos de la matriz del sistema lineal que resulta, así como su vector de términos independientes.

$$\text{Teniendo en cuenta que } aux = \frac{1}{h^2}$$

$$matriz(i, i-1) = 2 * aux$$

$$matriz(i, i) = -aux$$

$$matriz(i, i+1) = -aux$$

$$b(i) = pi * pi * \sin(pi * x(i)) \quad i = 2, \dots, n+1.$$

3. Edita el fichero **difusion.m** y observa lo siguiente:

(a) Se definen:

- Número de nodos interiores en la malla: n .
- Paso de discretización: h .
- Coordenadas de cada uno de los nodos de la malla: $x(i)$, $i = 1, \dots, n+2$.
- Los coeficientes no nulos de la matriz del sistema: $matriz(i, i-1)$, $matriz(i, i)$, $matriz(i, i+1)$, $i = 2, \dots, n+1$. (Compáralos con los obtenidos en el apartado (2)).
- El vector de términos independientes del sistema: $b(i)$, $i = 2, \dots, n+1$. (Compáralo con el obtenido en el apartado (2)).

(b) Se resuelve el sistema de ecuaciones.

(c) Se calcula el error máximo y se dibuja tanto la solución numérica como la exacta.

4. Completa la siguiente tabla y deduce el orden del método:

$n + 1$	Error máximo	Error en norma dos
10	$e_{10} = 0.008265416$	$e_{10} = 5.844532386154290e - 03$
20	$e_{20} = 2.058706764533236e - 03$	$e_{20} = 1.455725513676095e - 03$
40	$e_{40} = 5.142004781526488e - 04$	$e_{40} = 3.635946449909208e - 04$
80	$e_{80} = 1.285203835432736e - 04$	$e_{80} = 9.087763472445017e - 05$
160	$e_{160} = 3.212823780374130e - 05$	$e_{160} = 2.271809481896851e - 05$

El orden del método es 2, ya que en el ejercicio 1 de la entrega de Ejercicios de Derivación Numérica, vimos que el orden del método se calcula mediante la siguiente fórmula: $p =$

$$\log_2 \frac{E(h)}{E(\frac{h}{2})}, \text{ y sabemos que } h = \frac{1}{n+1}.$$

Veamos un ejemplo. Con el error máximo:

$$\log_2(2.058706764533236e - 03 / 5.142004781526488e - 04)$$

$$ans = 2.001335494994301 \approx 2$$

Y con el error en norma dos:

$$\log_2(1.455725513676095e - 03 / 3.635946449909208e - 04)$$

$$ans = 2.001335494995050 \approx 2$$

2. Problema de reacción-difusión

Se considera el problema:

$$(P2) \begin{cases} -u''(x) + (1+x)u(x) = x^5 + x^4 - 10x^2 + 2x, & x \in (-1, 1), \\ u(-1) = -1, \\ u(1) = 3. \end{cases}$$

1. Comprueba que la solución del problema (P2) es la función $u(x) = x^4 + 2x$.

Veamos que esta solución cumple tanto la ecuación de (P2) como sus condiciones de contorno:

$$u'(x) = 4x^3 + 2$$

$$u''(x) = 12x^2 \Rightarrow -u''(x) = -12x^2$$

$$\text{Además, tenemos que } (1+x)u(x) = (1+x)(x^4 + 2x) = x^4 + 2x + x^5 + 2x^2$$

Así pues, $-u''(x) + (1+x)u(x) = -12x^2 + x^4 + 2x + x^5 + 2x^2 = x^5 + x^4 - 10x^2 + 2x$, es decir, la solución cumple la ecuación.

Ahora tenemos que $u(-1) = (-1)^4 + 2(-1) = 1 - 2 = -1$ y $u(1) = 1^4 + 2 = 3$, luego, también cumple las condiciones de contorno.

2. Utiliza el método de diferencias finitas para discretizar el problema (P2) e indica cuáles son los elementos no nulos de la matriz del sistema lineal que resulta, así como su vector de términos independientes.

$$\text{Teniendo en cuenta que } aux = \frac{1}{h^2}$$

$$matriz(i, i-1) = 2 * aux + 1 + x(i)$$

$$matriz(i, i) = -aux$$

$$matriz(i, i+1) = -aux$$

$$i = 2, \dots, n+1.$$

$$b(i) = (x(i)^5) + (x(i)^4) - 10 * (x(i)^2) + (2 * x(i)) \quad i = 3, \dots, n$$

$$b(2) = (x(2)^5) + (x(2)^4) - 10 * (x(2)^2) + (2 * x(2)) - aux$$

$$b(n+1) = (x(n+1)^5) + (x(n+1)^4) - 10 * (x(n+1)^2) + (2 * x(n+1)) + 3 * aux$$

3. Modifica el fichero **difusion.m** adecuadamente de forma que resuelva el problema (P2).
4. Completa la siguiente tabla:

$n+1$	Error máximo	Error en norma 2
10	$e_{10} = 0.028182324$	$e_{10} = 2.947405018924729e - 02$
20	$e_{20} = 7.068031383460904e - 03$	$e_{20} = 7.381169362225908e - 03$
40	$e_{40} = 1.770543855468862e - 03$	$e_{40} = 1.846061970774845e - 03$
80	$e_{80} = 4.426800882330467e - 04$	$e_{80} = 4.615632594984962e - 04$
160	$e_{160} = 1.106767786157870e - 04$	$e_{160} = 1.153937950712062e - 04$

5. Indica el orden del método.

El orden del método es 2, haciendo lo mismo que antes sale, por ejemplo, con el error máximo:

$$\log_2(7.068031383460904e-03/1.770543855468862e-03)$$

$$ans = 1.997115866763582 \approx 2$$

Y con el error en norma dos:

$$\log_2(7.381169362225908e-03/1.846061970774845e-03)$$

$$ans = 1.999398409569063 \approx 2$$

3. Esquemas de orden alto: molécula de cinco puntos

Se considera el problema:

$$(P3) \begin{cases} -u''(x) + xu = \pi^2 \text{sen}(\pi x) + x \text{sen}(\pi x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

La solución exacta de este problema es $u(x) = \text{sen}(\pi x)$.

1. Construye una fórmula de cuarto orden para aproximar la derivada segunda.

Aplicamos el método de coeficientes indeterminados.

La aproximación de la segunda derivada mediante una fórmula de cuarto orden, viene dada por:

$$u''(x) \approx D^4(x) = au(x) + b(x+h) + c(x-h) + d(x+2h) + e(x-2h)$$

Mediante los desarrollos Taylor de cada término y resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos los valores de las constantes a, b, c, d y e , y obtenemos la siguiente fórmula :

$$u''(x) \approx \frac{-30u(x) + 16(u(x+h) + u(x-h)) - (u(x+2h) + u(x-2h))}{12h^2}$$

2. Utilizando dicha fórmula, discretiza el problema e indica los elementos no nulos de la matriz del sistema lineal que resulta, así como su vector de términos independientes.

Teniendo en cuenta que $aux = \frac{1}{h^2}$

$$\begin{aligned} \text{matriz}(i, i-2) &= aux/12 \\ \text{matriz}(i, i-1) &= (-16 * aux)/12; \\ \text{matriz}(i, i) &= (30 * aux)/12 \\ \text{matriz}(i, i+1) &= (-16 * aux)/12 \\ \text{matriz}(i, i+2) &= aux/12 \\ b(i) &= ((pi^2) * \text{sen}(pi * x(i))) + (x(i) * \text{sen}(pi * x(i))) \quad i = 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Considerando también la fórmula especial de cuarto orden para el primer y último nodo interior, indica los elementos no nulos de la matriz correspondientes a la primera y última fila, así como su vector de términos independientes.

$$\begin{aligned} \text{matriz}(2, 1) &= (-10/12) * aux \\ \text{matriz}(2, 2) &= (15/12) * aux + x(2) \\ \text{matriz}(2, 3) &= (4/12) * aux \\ \text{matriz}(2, 4) &= (-14/12) * aux \\ \text{matriz}(2, 5) &= (6/12) * aux \\ \text{matriz}(2, 6) &= (-1/12) * aux \\ b(2) &= ((pi^2) * \text{sen}(pi * x(2))) + (x(2) * \text{sen}(pi * x(2))) \\ \text{matriz}(n+1, n+2) &= (-10/12) * aux \\ \text{matriz}(n+1, n+1) &= (15/12) * aux + x(2) \\ \text{matriz}(n+1, n) &= (4/12) * aux \\ \text{matriz}(n+1, n-1) &= (-14/12) * aux \\ \text{matriz}(n+1, n-2) &= (6/12) * aux \\ \text{matriz}(n+1, n-3) &= (-1/12) * aux \\ b(n+1) &= ((pi^2) * \text{sen}(pi * x(n+1))) + (x(2) * \text{sen}(pi * x(n+1))) \end{aligned}$$

3. Completa la siguiente tabla:

$n + 1$	Error máximo	Error en norma dos
10	$e_{10} = 4.539531146e - 5$	$e_{10} = 2.695888914295966e - 05$
20	$e_{20} = 5.937376254205873e - 06$	$e_{20} = 4.105242448769509e - 06$
40	$e_{40} = 3.983312237831882e - 07$	$e_{40} = 2.808873342000224e - 07$
80	$e_{80} = 2.511766883372957e - 08$	$e_{80} = 1.775504204389119e - 08$
160	$e_{160} = 1.571545338308056e - 09$	$e_{160} = 1.111225665199643e - 09$

4. Utilizando los resultados de la tabla anterior comprueba el orden del método.

Mediante el mismo método que en los dos ejercicios anteriores, obtenemos que el orden del método es aproximadamente 4.

Por ejemplo, en la norma infinito:

$$\log_2(3.983312237831882e - 07 / 2.511766883372957e - 08)$$

$$ans = 3.987194092631833 \approx 4$$

Y en la norma 2:

$$\log_2(2.808873342000224e - 07 / 1.775504204389119e - 08)$$

$$ans = 3.983690890007330 \approx 4$$