Geometría de Curvas y Superficies

Primer parcial

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- Las tres preguntas tienen el mismo valor.
- Razona todas las respuestas.

- [1] a) Sea $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, no necesariamente parametrizada por el arco.
- Define el diedro de Frénet y curvatura.
 - Expresa las derivadas del diedro en función de este.
- b) Sea $\rho : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho(\theta) := 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta$.
- Demuestra que define una curva regular en coordenadas polares (se llama cisoide de Diocles).
 - Encuentra una ecuación polinómica en coordenadas cartesianas.
 - Calcula su curvatura.
- [2] a) Sea $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva birregular y sea $\mathbb{S}$ una esfera de centro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ y radio $r > 0$.
- Define el contacto de la curva y la esfera en $t = t_0 \in I$.
 - Define la esfera osculatriz y describe su centro y radio.
 - Calcula el vector velocidad de la curva que definen los centros de las esferas osculatrices.
- Se define el campo vectorial de Darboux $\mathbf{D} := \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$.
- Verifica que se cumplen las siguientes ecuaciones:
- $$\mathbf{t}' = \mathbf{D}, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{D} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{D} \times \mathbf{b}.$$
- Expresa $\mathbf{D}'$ y $\mathbf{D} \times \mathbf{D}'$ en función del triedro de Frénet; ¿qué debe ocurrir para que este último no se anule?
- b) Considera la curva espacial $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(t) := (3 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, \cos t + 5 \operatorname{sen} t)$.
- Demuestra que es cerrada simple y calcular el periodo.
 - Calcula los planos osculadores.

- [3] a) Define superficies usando solo grafos de funciones diferenciables. Aplícalo a una esfera.
- b) Sea S una superficie regular conexa y compacta.
- Supón que existe $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ que está en todas las rectas normales de S . Sea $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ una carta. Demuestra que $\mathbf{x}(U)$ está contenida en una esfera. ¿Cuál es el centro?
 - Prueba que S es una esfera.
 - Sea $\mathbf{p} \in S$ tal que existe un plano afín π que cumple que $\mathbf{p}$ es un punto aislado de $S \cap \pi$. Demuestra que π es el plano tangente afín de S en $\mathbf{p}$.
 - Encuentra un ejemplo en el cual si π es el plano tangente afín a S en $\mathbf{p}$ entonces $\mathbf{p}$ no es un punto aislado de $\mathbf{p} \cap \pi$.