
Geometría de Curvas y Superficies

Primer parcial

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- Las tres preguntas tienen el mismo valor.
- Razona todas las respuestas.

- [1] a) Considera los siguientes conceptos: centro de curvatura, círculo osculador y evoluta. Establece las condiciones necesarias para que estén bien definidas y defínelas cuando se cumplan.
- b) Sea $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular tal que el centro de curvatura $\mathbf{c}(t)$ se puede definir para todo $t \in I$.
- (i) Sea $\mathbf{y}(t)$ el punto simétrico de $\mathbf{c}(t)$ con respecto a $\mathbf{x}(t)$. Demuestra que $\mathbf{y}$ define una curva regular.
 - (ii) Expresa la curvatura de $\mathbf{y}$ en términos de la curvatura de $\mathbf{x}$.
 - (iii) Encuentra la relación entre las evolutas de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
 - (iv) Considera una parametrización regular $\mathbf{x}$ de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y encuentra la curva $\mathbf{y}$ de (i).
- [2] a) Considera una curva regular $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Define su esfera osculatriz y enuncia las condiciones para que se pueda definir.
- b) Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva para la que $\mathbf{y}$ esté definida, donde $\mathbf{y}(t)$ es el centro de la esfera osculatriz de $\mathbf{x}$ en t .
- (i) Calcula $\mathbf{y}$ asumiendo que $\mathbf{x}$ está parametrizada por el arco.
 - (ii) Deduce la fórmula de $\mathbf{y}$ para parametrizaciones más generales.
 - (iii) ¿En qué condiciones $\mathbf{y}$ es una curva birregular?
 - (iv) Suponiendo que $\mathbf{y}$ es una curva birregular, encuentra la intersección de los planos osculadores de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en cada valor de t .
 - (v) Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la hélice circular $\mathbf{x}(t) := (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Calcula $\mathbf{y}$ y la intersección de los planos osculadores en t .

[3] Sea S una superficie regular.

a) Define la noción de bilateralidad de S y demuestra que la imagen de una carta es bilateral.

b) Sea $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ un campo vectorial normal unitario. Decimos que una carta $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ es una *carta de disco unitario* si $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$.

(i) Demuestra que S es la unión de imágenes de cartas de disco unitario.

(ii) Sea $\mathbf{x}$ una carta de disco unitario. Da una fórmula para $\mathbf{N}_{\mathbf{x}} := \mathbf{N} \circ \mathbf{x}$.

(iii) Sea $\mathbf{x}$ una carta de disco unitario. Demuestra que existe $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ tal que la aplicación

$$\begin{aligned} \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < \varepsilon^2\} &\xrightarrow{\mathbf{x}_\varepsilon} \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \mathbf{x}(u, v) + \varepsilon \mathbf{N}_{\mathbf{x}}(u, v), \end{aligned}$$

es una carta de una superficie $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

(iv) Demuestra que si S es compacta, entonces existe $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ tal que

$$S_\varepsilon := \{\mathbf{p} + \varepsilon \mathbf{N}(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in S\}$$

es una superficie regular para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$.