

Geometría de Curvas y Superficies

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- La nota del apartado [1]b) es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo de curvas planas.
- La nota del apartado [1]c) es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo de curvas planas.
- La nota del apartado [2]b) es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo de curvas espaciales.
- La nota del apartado [2]c) es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo de curvas espaciales.
- Si P_N^n es la nota del apartado [N]n), la nota global se calcula con la siguiente fórmula:

$$\frac{3(P_1 + P_2) + 4P_3}{10}, \quad P_N = \frac{P_N^a + P_N^b + P_N^c}{3}, \quad N = 1, 2, 3.$$

- Razona todas las respuestas.

- [1] a) Sea $\mathbf{x} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada.
- Define los conceptos de curva regular, diedro de Frenet, curvatura y recta tangente.
 - Si $\mathbf{x}$ es regular, ¿bajo qué condiciones sobre las derivadas la curvatura no se anula nunca?
 - Sea L la recta tangente a $\mathbf{x}$ en $t = 0$ y supón que $\mathbf{x}(t) \in L \iff t = 0$. Sea π^+ el semiplano cerrado determinado por L y $\mathbf{n}(0)$. ¿Bajo qué condiciones la imagen de $\mathbf{x}$ está en π^+ ?
- b) Sea $0 < \varepsilon \leq \infty$, sea $\mathbf{x} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular. Sea $\mathbf{y} : (-\sqrt[3]{\varepsilon}, \sqrt[3]{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva dada por $\mathbf{y}(t) := \mathbf{x}(t^3)$.
- Comprueba que $\mathbf{y}$ es regular en $(-\sqrt[3]{\varepsilon}, 0) \cup (0, \sqrt[3]{\varepsilon})$, calcula ahí $\kappa_{\mathbf{y}}$ y también $\lim_{t \rightarrow 0} \kappa_{\mathbf{y}}(t)$.
 - Sea $h : J \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ una biyección $\mathcal{C}^\infty$ tal que $0 \in J$, $h(0) = 0$, $h' \geq 0$ y $h'(t) = 0$ si y solo si $t = 0$. Repite el apartado anterior para $\mathbf{x} \circ h$.
 - Sea $\mathbf{z} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva dada por $\mathbf{z}(t) := (3t^2, 2t^3)$. Comprueba que $\mathbf{z}$ es regular en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcula ahí $\kappa_{\mathbf{z}}$ y también $\lim_{t \rightarrow 0} \kappa_{\mathbf{z}}(t)$.
 - Deduce que $\mathbf{z}$ no se puede expresar como las curvas que aparecen en (ii).
- c) Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular cerrada de periodo $T > 0$. La *curvatura total* de $\mathbf{x}$ se define como

$$\kappa_{\mathbf{x}}^{\text{tot}} := \int_0^T \kappa_{\mathbf{x}}(t) \|\mathbf{x}'(t)\| dt.$$

- Demuestra que la curvatura total no cambia si reparametrizamos la curva, es decir, si definimos $\mathbf{y} := \mathbf{x} \circ h$, donde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un difeomorfismo creciente tal que existe $T' > 0$ cumpliendo $h(t + T') = h(t) + T$, entonces $\kappa_{\mathbf{x}}^{\text{tot}} = \kappa_{\mathbf{y}}^{\text{tot}}$.
- Calcula la curvatura total de una parametrización antihoraria de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Haz lo mismo con la lemniscata de Bernoulli $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{x}(t) := \left(\frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \cos^2 t} \right) = \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} (1, \cos t).$$

- [2] a) Sea I un intervalo abierto y sea $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva birregular cuya torsión no se anula nunca.
- Define el contacto de $\mathbf{x}$ con una esfera y también qué es la esfera oscultriz.
 - Da la fórmula del centro de la esfera oscultriz cuando la curva $\mathbf{x}$ está parametrizada por el arco (sin demostración).
 - Da la fórmula del centro de la esfera oscultriz cuando la curva $\mathbf{x}$ tiene una parametrización arbitraria.

- b) Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva birregular. Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y sea $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva dada por $\mathbf{y}(t) := a\mathbf{x}(t)$.
- Supón que la $\mathbf{x}$ está parametrizada por el arco y calcula $\mathbf{t}_y, \mathbf{n}_y, \mathbf{b}_y, \kappa_y, \tau_y$ en función de los correspondientes invariantes de $\mathbf{x}$.
 - Justifica que los resultados obtenidos en el apartado anterior siguen siendo válidos aunque $\mathbf{x}$ no esté parametrizada por el arco.
- c) Dado $b > 0$ considera el elipsoide de ecuación $x^2 + y^2 + (bz)^2 = 1$ y el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = x$.
- Construye una curva regular cerrada $\mathbf{x}$ cuya imagen es la intersección del elipsoide y del cilindro.
 - Para los valores de $t \in \mathbb{R}$ que cumplen $\mathbf{x}(t) = (1, 0, 0)$ encuentra el triedro de Frenet.
 - Sean t_0, t_1 dos valores como en el apartado anterior que no difieran por un múltiplo del periodo de $\mathbf{x}$. Justifica que $\kappa(t_0) = \kappa(t_1)$ y $\tau(t_0) = -\tau(t_1)$ sin calcular ni la curvatura ni la torsión.
 - Encuentra una elipse cuya longitud coincida con la longitud de la curva $\mathbf{x}$.
- [3] a) Sea S una superficie regular, $\mathbf{p} \in S$, y $\mathbf{x}_i : U_i \rightarrow S$, $i = 1, 2$, dos cartas tales que $(0, 0) \in U_1 \cap U_2$ y $\mathbf{p} = \mathbf{x}_i(0, 0)$.
- Define $T_{\mathbf{p}}S$, encuentra dos bases usando los campos coordenados de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ y da la matriz del cambio de base.
 - Define campo vector normal unitario y superficie bilateral.
 - Demuestra que $\mathbf{x}_i(U_i)$, $i = 1, 2$, son superficies bilaterales.
 - Demuestra que si $\mathbf{x}_1(U_1) \cap \mathbf{x}_2(U_2)$ es conexo, entonces $\mathbf{x}_1(U_1) \cup \mathbf{x}_2(U_2)$ es bilateral.
 - Explica por qué si $\mathbf{x}_1(U_1) \cap \mathbf{x}_2(U_2)$ no es conexo, entonces no se puede garantizar que $\mathbf{x}_1(U_1) \cup \mathbf{x}_2(U_2)$ sea bilateral.
- b) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, un homeomorfismo sobre la imagen y tal que $x(t) > 0$, $\forall t \in I$, donde $\gamma(t) := (x(t), y(t))$. Considera la aplicación
- $$\begin{aligned} \mathbb{R} \times I &\xrightarrow{\mathbf{x}} \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x(v) \cos u, x(v) \sin u, y(v)) \end{aligned}$$
- y sea $S := \mathbf{x}(\mathbb{R} \times I)$.
- Demuestra que $\mathbf{x}$ es una superficie parametrizada.
 - Demuestra que S es una superficie regular bilateral.
- c) Sea $\gamma_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la hélice circular dada por
- $$\gamma_{a,b}(t) := (a \cos t, a \sin t, bt)$$
- con $a, b > 0$. Consideremos la aplicación $\mathbf{x}_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}_{a,b}(u, v) := \gamma_{a,b}(u) + v\mathbf{n}_{\gamma_{a,b}}(u)$. Sea $S_{a,b} := \mathbf{x}_{a,b}(\mathbb{R}^2)$.
- Demuestra que $S_{a,b}$ es una superficie regular y que es reglada.
 - Encuentra la línea de estricción de esta superficie reglada.
 - Demuestra que $S_{a,b}$ solo depende de b .