UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA | Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS | 25 de enero de 2023

Geometría de Curvas y Superficies

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- Las tres preguntas tienen el mismo valor; la ponderación de cada apartado se señala individualmente.
- Razona todas las respuestas.

[1] a) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada.

(i) Define el círculo osculador de $\mathbf{x}$ en un punto regular de curvatura no nula.

(ii) Sea $\mathbf{x}$ una curva con círculo osculador en cada punto. ¿Cómo se denomina la curva que une los centros de los círculos osculadores en cada punto de $\mathbf{x}$? ¿Cuándo es esta curva regular?

(iii) Calcula la curva del apartado anterior para la circunferencia de radio r.

b) Considera la elipse

$$E_{a,b} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, F_{a,b}(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0 \right\}.$$

(i) Encuentra una parametrización que haga que el conjunto $E_{a,b}$ sea una curva regular de curvatura positiva, otra de curvatura negativa y otra para la que la parametrización sea no regular.

(ii) Calcula la ecuación del círculo osculador de $E_{a,b}$ en el punto $(a, 0) \in E_{a,b}$.

Para el siguiente apartado usaremos que el índice de intersección de una curva $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^2$ (parametrizada por el arco) con $E_{a,b} = \{F_{a,b}(x, y) = 0\}$ en $\mathbf{p} = \mathbf{x}(t_0)$ se puede obtener como el orden de $t - t_0$ en el desarrollo de Taylor de $F_{a,b}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t))$ centrado en t_0.

(iii) Calcula el índice de intersección del círculo osculador de $E_{a,b}$ del apartado anterior en el punto $(a, 0) \in E_{a,b}$.

c) Considera $\mathbf{x} : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ una curva plana parametrizada por el arco tal que $\mathbf{x}(1) = (0, 0)$, $\mathbf{x}'(1) = \mathbf{e}_1$ y cuya curvatura sea $\kappa(t) = \frac{1}{t}$, $t > 0$.

(i) Demuestra que $\mathbf{x} : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ existe y es única.

(ii) Calcula la longitud *orientada* de $\mathbf{x} : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ en el intervalo cerrado $[1, t]$.

[2] a) Sea I un intervalo abierto y sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular.

i) Define el contacto de $\mathbf{x}$ con un plano y define el plano osculador.

ii) Calcula todas las posibilidades de orden de contacto de un plano afín π con la curva $\mathbf{x}$ en $t_0 \in I$.

b) Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular. Sea $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y sea $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^3$ la curva dada por $\mathbf{y}(t) := a\mathbf{x}(t)$.

i) Supón que $\mathbf{x}$ está parametrizada por el arco y calcula $\mathbf{t_y}, \mathbf{n_y}, \mathbf{b_y}, \kappa_{\mathbf{y}}, \tau_{\mathbf{y}}$ en función de los correspondientes invariantes de $\mathbf{x}$.

ii) Justifica que los resultados obtenidos en el apartado anterior siguen siendo válidos aunque $\mathbf{x}$ no esté parametrizada por el arco.

c) Dado $b > 0$ considera el elipsoide de ecuación $x^2+y^2+b^2z^2 = 1$ y el cilindro de ecuación $x^2+y^2 = x$.

i) Construye una curva regular cerrada $\mathbf{x}$ cuya imagen es la intersección del elipsoide y del cilindro.

ii) Para los valores de $t \in \mathbb{R}$ que cumplen $\mathbf{x}(t) = (1, 0, 0)$ encuentra el triedro de Frenet.

iii) Sean t_0, t_1 dos valores como en el apartado anterior que no difieran por un múltiplo del periodo de $\mathbf{x}$. Justifica que $\kappa(t_0) = \kappa(t_1)$ y $\tau(t_0) = -\tau(t_1)$ sin calcular ni la curvatura ni la torsión.

iv) Encuentra una elipse cuya longitud coincida con la longitud de la curva $\mathbf{x}$.

[3] a) Sea S una superficie regular conexa y sea $\mathbf{p} \in S$.

i) Define el plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ y descríbelo cuando en un entorno $V \subset \mathbb{R}^3$ de $\mathbf{p}$ la superficie S se define como el lugar de ceros de una función $F : V \to \mathbb{R}$ (no olvides señalar qué propiedades debe verificar esta función).

ii) Sea $\mathbf{N}S := \{(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{p} \in S, \|\mathbf{v}\| = 1, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S^{\perp}\}$. Demuestra que S bilateral si y solo si $\mathbf{N}S$ es no conexo y que en ese caso cada componente conexa es homeomorfa a S.

b) Considera la aplicación $\mathbf{x} : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^2)$.

i) Comprueba si $\mathbf{x}$ define una superficie parametrizada y sea $S := \mathbf{x}((0, \infty) \times \mathbb{R})$.

ii) Sea $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}_{|(0,\infty)\times(0,2\pi)}$. Comprueba que $\mathbf{x}_1$ es una carta de S.

iii) Concluye que S es una superficie regular

iv) Sean $\mathbf{c}_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{c}_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ las curvas sobre S dadas respectivamente por

$$\mathbf{c}_1(t) := \mathbf{x}(t, t + 1), \qquad \mathbf{c}_2(t) := \mathbf{x}(t, 3 - t).$$

Comprueba que las imágenes de $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ solo tienen un punto de corte $\mathbf{p} = \mathbf{c}_1(t_1) = \mathbf{c}_2(t_2)$.

v) Calcula el plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ a S en $\mathbf{p}$ y escribe la matriz de cambio de base en el plano $T_{\mathbf{p}}S$ de $(\mathbf{c}_1'(t_1), \mathbf{c}_2'(t_2))$ a la base formada por las curvas coordenadas.

vi) Calcula el ángulo que forman las curvas $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ en $\mathbf{p}$.