UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA — Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS — 22 de enero de 2021

Geometría de Curvas y Superficies

- *Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.*
- *Cada apartado se puntúa sobre 10.*
- *La nota de los apartados b) y c) de* **[1]** *es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo de curvas planas.*
- *La nota de los apartados b) y c) de* **[2]** *es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo de curvas espaciales.*
- *Si* P_N^n *es la nota del apartado* [**N**]n), *la nota global se calcula con la siguiente fórmula:*
$$\frac{3(P_1+P_2)+4P_3}{10}, \quad P_N = \frac{2P_N^a+4P_N^b+4P_N^c}{10}, \quad N=1,2, \quad P_3 = \frac{P_N^a+P_N^b+P_N^c}{3}.$$
- *Razona todas las respuestas.*

[1] a) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizada por el arco.
(i) Define su función curvatura $\kappa_{\mathbf{x}}(t)$.
(ii) Si $t_0 \in I$ es tal que $\kappa_{\mathbf{t}}(t_0) \neq 0$, ¿cuáles son las coordenadas del centro de curvatura de $\mathbf{x}$ en t_0?

b) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular y denotemos por $\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(t)$ su vector tangente en t. Definimos otra curva $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^2$ de manera que $\mathbf{y}(t) := \mathbf{t}_{\mathbf{x}}(t)$.
(i) Determina cuándo $\mathbf{y}$ es regular y calcula su diedro de Frenet en función de $\mathbf{x}$.
(ii) Aplícalo a la curva $\mathbf{x} : (0,+\infty) \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, con $\mathbf{x}(t) := te^{it}$ en notación compleja.

c) Considera la curva dada por la ecuación $\rho = \operatorname{sen}\theta$ en coordenadas polares, $\theta \in [0,\pi]$.
(i) Comprueba que es una curva regular.
(ii) Calcula su curvatura y longitud.
(iii) Usa los resultados de los apartados anteriores para describir la curva.

[2] a) Enuncia el Teorema Fundamental de Curvas Espaciales.

b) Utiliza dicho teorema para encontrar un intervalo maximal I, $0 \in I$, y una curva $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$, parametrizada por el arco, tal que $\mathbf{x}(0) = (1,0,0)$, $\mathbf{t}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1)$, $\mathbf{n}(0) = (-1,0,0)$, $\mathbf{b}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,-1,1)$ y $\kappa(t) = \tau(t) = \frac{1}{2}$.

c) Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(t) := (\cos^2 t, \cos t, \operatorname{sen} t \cos t)$.
(i) Demuestra que es regular y cerrada.
(ii) Calcula el ángulo de las rectas tangentes y normales con el eje Y.
(iii) Calcula su triedro de Frenet, curvatura y torsión.

[3] a) Dada $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva espacial birregular parametrizada por el arco, definimos el *desarrollo tangente* de γ como la aplicación $\mathbf{x} : I \times (0,1) \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}(u,v) := \gamma(u) + \gamma'(u)v$.

(i) Determina en qué condiciones podemos asegurar que $\mathbf{x}$ es una superficie parametrizada.

(ii) Determina la recta normal en términos del triedro de Frenet de γ.

b) Considera $S = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$, donde $F(x,y,z) := 3x^2 + 2xy + y^2 - 4xz + 2z^2 - 2x - 2y$.

(i) Asumiendo que es conexa, demuestra que se trata de una superficie regular.

(ii) Encuentra los planos tangentes y prueba que se trata de un cilindro.

(iii) Describe una curva directriz y la dirección generatriz.

c) Considera la aplicación $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0) \in \mathbb{R}^2 \mid u \leq 0\}$, definida como $\mathbf{x}(u,v) := (uv, v, u^2)$.

(i) Demuestra que es una superficie parametrizada.

(ii) Comprueba que $\mathbf{x}$ es inyectiva, pero no es un homeomorfismo sobre la imagen, por lo que $\mathbf{x}$ no define una carta.