UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA — Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS — 20 de enero de 2024

Geometría de Curvas y Superficies

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- Las tres preguntas tienen el mismo valor.
- Razona todas las respuestas.

[1] a) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada.

(i) Define el diedro de Frenet y la curvatura de $\mathbf{x}$.

(ii) Razona que solo se puede definir si la curva es regular.

(iii) Supón que $\mathbf{x}$ es regular. Dado $t_0 \in I$, considera la función

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{h} \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0), \mathbf{n}(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

Úsala para demostrar que si la curva *atraviesa* la recta tangente a $\mathbf{x}$ en $t = t_0$, entonces la curvatura se anula en $t = t_0$.
Atravesar significa que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{x}(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ corta a los dos semiplanos abiertos determinados por la recta tangente a $\mathbf{x}$ en $t = t_0$.

b) Considera la elipse

$$E_{a,b} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}, \quad a > b > 0.$$

(i) Encuentra una parametrización periódica $\mathbf{x}$ que haga que el conjunto $E_{a,b}$ sea la imagen de un curva regular de curvatura negativa (y calcúlala).

(ii) Calcula la derivada de la curvatura y di en qué puntos de $E_{a,b}$ se encuentran los vértices.

c) Sea $\mathbf{x} : J \to \mathbb{R}^2$ una curva plana regular; dado $t_0 \in I$ consideramos la función $L : I \to \mathbb{R}$ dada por $L(t) := \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{x}'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau$. Sea $\mathbf{y} : J \to \mathbb{R}^2$ la curva dada por $\mathbf{y}(t) := \mathbf{x}(t) - L(t)\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(t)$.

(i) Demuestra que $\mathbf{x}$ es evoluta de $\mathbf{y}$.

(ii) Calcúla $\mathbf{y}$ si $\mathbf{x}$ es una circunferencia.

[2] a) Sean I un intervalo abierto, $t_0 \in I$, y sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular con torsión no nula.

i) Describe la intersección y la posición relativa de la curva $\mathbf{x}$ en un entorno $\mathbf{p} = \mathbf{x}(t_0)$ con los planos osculador y rectificante.

ii) ¿Es posible que $\mathbf{x}(I)$ esté contenida en el plano rectificante para $t = t_0$?

iii) Demuestra que si todas las rectas tangentes son paralelas entre sí, entonces $\mathbf{x}$ es una parametrización de una recta.

b) Dos curvas birregulares $\mathbf{x}: I \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{y}: I \to \mathbb{R}^3$ son *compañeros de Bertrand* si las rectas normales $r_{\mathbf{n}_\mathbf{x}}(t)$ (resp. $r_{\mathbf{n}_\mathbf{y}}(t)$) para $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{y}$) en $t \in I$ coinciden. Supongamos que $\mathbf{x}: I \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{y}: I \to \mathbb{R}^3$ son compañeros de Bertrand.

i) Demuestra que $\mathbf{n}_\mathbf{x}(t) = \pm\mathbf{n}_\mathbf{y}(t)$ para todo $t \in I$.

ii) Demuestra que existe una función diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \alpha(t)\mathbf{n}_\mathbf{x}(t)$.

iii) Demuestra que α es constante.

iv) Demuestra que el ángulo entre los vectores tangentes $\mathbf{t}_\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{t}_\mathbf{y}(t)$ es constante. (Pista: Deriva $\langle \mathbf{t}_\mathbf{x}(t), \mathbf{t}_\mathbf{y}(t)\rangle$).

c) Considera la curva $\mathbf{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(t) := (\cos t + 2\operatorname{sen} t, 1 + 2\operatorname{sen} t - \cos t, 2 + 2\cos t - \operatorname{sen} t)$.

i) Calcula el triedro de Frenet en $t = 0$.

ii) ¿Está $\mathbf{x}$ parametrizada por el arco?

iii) Demuestra que la imagen de $\mathbf{x}$ está contenida en un plano.

iv) Demuestra que de hecho $\mathbf{x}$ es una circunferencia y encuentra el centro y el radio.

[3] a) Sea S una superficie regular conexa.

i) Define campo vectorial normal y bilateralidad.

ii) Sea $\mathbf{x}: U \to S$ una carta. Justifica que $\mathbf{x}(U)$ es bilateral.

iii) Supón que existe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$ tal que $S = F^{-1}(0)$, $\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $\forall (x_0, y_0, z_0) \in S$. Justifica que

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{\mathbf{N}} \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto \frac{\operatorname{grad} F(x, y, z)}{\|\operatorname{grad} F(x, y, z)\|} \end{aligned}$$

es un campo vectorial normal.

b) Considera la curva $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\boldsymbol{\gamma}(t) := (6t, 3t^2, t^3)$. Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(u, v) = \boldsymbol{\gamma}(u) + v\boldsymbol{\gamma}'(u)$.

i) Demuestra que $\mathbf{x}$ es una superficie parametrizada.

ii) ¿Es una superficie regular?

iii) Sea $\boldsymbol{\delta} : (0, \infty) \to S \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida como $\boldsymbol{\delta}(t) := \mathbf{x}(at + b, t)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Calcula su curvatura. ¿Cuándo se anula?

iv) Demuestra que S es bilateral y calcula un campo vectorial normal unitario.

v) ¿Para qué valores $(u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ existe una carta $\mathbf{y} : U \to \mathbf{x}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ de la forma $(u, v) \mapsto (u, h(u, v), v)$ para alguna función h y tal que $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ está en la imagen de $\mathbf{y}$.