UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA — Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS — 16 de febrero de 2022

Topología General

Ejercicio 1.

(a) Define topologías metrizable y seudometrizable.

(b) Sea X un conjunto finito y d una métrica en X. Demuestra que $(X, \mathcal{T}(d))$ es discreto y que d es equivalente a la métrica discreta.

Ejercicio 2. Consideremos la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}_0 = \{(a, a+r] \mid a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$$

(a) Dado X un conjunto cualquiera y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, da las condiciones para que $\mathcal{B}$ sea la base de abiertos de alguna topología en X.

(b) Demuestra que $\mathcal{B}_0$ es la base de una topología $\mathcal{T}_0$ de $\mathbb{R}$.

(c) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, sea $\Phi_{a,b} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ la aplicación dada por $\Phi_{a,b}(t) = at + b$. ¿Cuándo es $\Phi_{a,b}$ continua?

(d) Estudia la convergencia de las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left\{\frac{-1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{T}_0$.

Ejercicio 3. Considera dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Dotaremos de una topología al conjunto $X \times Y$ usando como subbase a la familia de conjuntos

$$\mathcal{S}_\pi = \{\, X \times V \mid V \in \mathcal{T}_Y \,\} \cup \{\, U \times Y \mid U \in \mathcal{T}_X \,\}$$

(a) Si Z es un conjunto y $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Z)$, ¿qué debe cumplir $\mathcal{S}$ para ser subbase de una topología en Z?

(b) Demuestra que, efectivamente, $\mathcal{S}_\pi$ es una base para una topología sobre $X \times Y$ y construye una base de esa topología.

(c) Demuestra que si X e Y son Hausdorff entonces, $X \times Y$ con la topología anterior también lo es. Recuerda primero qué significa que un espacio topológico es Hausdorff.

Ejercicio 4. Considera el intervalo unidad $I = [0,1]$ junto con su distancia usual. Tomamos el producto de una cantidad numerable copias de él, es decir, $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} I$. Definimos la aplicación

$$d\big((x_i),(y_i)\big) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

(a) Demuestra d está bien definida y es una función distancia.
(b) Demuestra que una sucesión en X converge si y solo si sus proyecciones coordenadas lo hacen.

Ejercicio 5. Sea $X = [0,2)$ y considera $\mathcal{T} = \{\, [0,a) \mid a \in [0,2] \,\}$.

(a) Demuestra $\mathcal{T}$ es una topología sobre X.
(b) Calcula la clausura, interior, frontera, exterior, aislado y derivado de $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.
(c) ¿Es X separable? Recuerda primero qué significa que un espacio topológico es separable.

Ejercicio 6. Sea X un conjunto y sea $\eta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una aplicación que cumple las propiedades siguientes:

(1′) $\eta(\emptyset) = \emptyset$.
(2′) $\eta(\eta(A)) \subset A \cup \eta(A)$, $\forall A \subset X$.
(3′) $\eta(A \cup B) = \eta(A) \cup \eta(B)$, $\forall A, B \subset X$.
(4′) $x \notin \eta(\{x\})$, $\forall x \in A$.

Dado $A \subset X$, denotamos $\gamma(A) := A \cup \eta(A)$.

$$\mathcal{T} := \{X \setminus \gamma(A) \mid A \subset X\}$$

(a) Demuestra que $\mathcal{T}$ es una topología.
(b) Demuestra que en esa topología $\overline{A} = \gamma(A)$.
(c) Demuestra que $\eta(A) = A'$.

Ejercicio 7. Sea X un conjunto, sea $x_0 \in X$ y sean A, B dos subconjuntos de X, tales que $x_0 \in A$, $x_0 \notin B$, A, B tienen más de un punto. Sea $\mathcal{C} := \{\emptyset, A, B, X\} \subset \mathcal{P}(X)$.

(a) ¿Qué deben cumplir x_0, A, B para que $\mathcal{C}$ sea la familia de cerrados de una topología?
(b) Da una base de entornos para cada $x \in X$. ¿Es primero numerable?
(c) Sea $x \in X$. En función de su relación con x_0, A, B determina $\overline{\{x\}}$, $\operatorname{Int}\{x\}$, $\operatorname{Ext}\{x\}$, $\operatorname{Fr}\{x\}$, $\operatorname{Ais}\{x\}$ y $\{x\}'$.