UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA — Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS — 14 de marzo de 2024

Geometría de Curvas y Superficies

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- Las tres preguntas tienen el mismo valor.
- Razona todas las respuestas.

[1] a) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular.

(i) Define la curvatura de $\mathbf{x}$

(ii) Si $\mathbf{t}_{\mathbf{x}} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, con $\alpha : I \to \mathbb{R}$ función $\mathcal{C}^\infty$, relaciona esta función con la curvatura.

(iii) Dado $t_0 \in I$, demuestra que la curva siempre *atraviesa* la recta normal a $\mathbf{x}$ en $t = t_0$. *Atravesar* significa que $\forall\varepsilon > 0$, $\mathbf{x}(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ corta a los dos semiplanos abiertos determinados por la recta normal a $\mathbf{x}$ en $t = t_0$.

b) Considera

$$E_{a,b} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,\ x > 0\right\}, \quad a > b > 0.$$

(i) Encuentra una parametrización periódica $\mathbf{x}$ que haga que el conjunto $E_{a,b}$ sea la imagen de un curva regular de curvatura negativa (y calcúlala).

(ii) Calcula la derivada de la curvatura y di en qué puntos de $E_{a,b}$ se encuentran los vértices.

c) Sea $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular. Sea $a \neq 0$ y sea $\mathbf{y}_a : I \to \mathbb{R}^2$ la curva dada por $\mathbf{y}_a(t) := \mathbf{y}(t) + a\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(t)$.

(i) Demuestra que podemos suponer que $\mathbf{y}$ es parámetro arco.

(ii) Determina la regularidad de $\mathbf{y}_a$ y calcula su curvatura.

[2] a) Sean I un intervalo abierto, $t_0 \in I$, y sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular con torsión no nula.

i) Define el número de intersección de $\mathbf{x}$ en $t = t_0$ con una esfera.

ii) Define la esfera osculatriz de $\mathbf{x}$ en $t = t_0$.

iii) Demuestra que la curva está contenida en una esfera si y solo si la curva de los centros de las esferas osculatrices es constante.

b) Dos curvas birregulares $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^3$ son *compañeros de Bertrand* si las rectas normales $r_{\mathbf{n}_{\mathbf{x}}}(t)$ (resp. $r_{\mathbf{n}_{\mathbf{y}}}(t)$) para $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{y}$) en $t \in I$ coinciden. Supongamos que $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^3$ son compañeros de Bertrand.

i) Relaciona $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{n}_{\mathbf{y}}$.

ii) Demuestra que existe una función diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \alpha(t)\mathbf{n}_{\mathbf{x}}(t)$.

iii) Demuestra que α es constante.

iv) Demuestra que el ángulo entre los vectores tangemtes $\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(t)$ y $\mathbf{t}_{\mathbf{y}}(t)$ es constante.

c) Considera la curva $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(t) := (15 \cos t - 12 \operatorname{sen} t + 42,\ 20 \cos t + 9 \operatorname{sen} t + 31,\ 20 \operatorname{sen} t - 20)\,.$$

i) Calcula el triedro de Frenet en $t = 0$.

ii) ¿Está $\mathbf{x}$ parametrizada por el arco?

iii) Demuestra que la imagen de $\mathbf{x}$ está contenida en un plano.

iv) Demuestra que de hecho $\mathbf{x}$ es una circunferencia y encuentra el centro y el radio.

[3] a) Sea S una superficie regular conexa.

i) Define plano tangente vectorial.

ii) Sea $\mathbf{x} : U \to S$ una carta. Úsala para dar bases de $T_{\mathbf{p}}S$, si $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U)$.

iii) Supón que existe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$ tal que $S = F^{-1}(0)$, $\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $\forall (x_0, y_0, z_0) \in S$. Da la ecuación del plano tangente afín a S en (x_0, y_0, z_0).

b) Considera la curva $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\boldsymbol{\gamma}(t) := (6t, 3t^2, t^3)$. Sea

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{\ \mathbf{x}\ } \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \boldsymbol{\gamma}(u) + (\cos v, \sin v, 0). \end{aligned}$$

i) Demuestra que $\mathbf{x}$ es una superficie parametrizada.

ii) ¿Es $S := \mathbf{x}(\mathbb{R}^2)$ una superficie regular?

iii) Sea $\boldsymbol{\delta} : \mathbb{R} \to S \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida como $\boldsymbol{\delta}(t) := \mathbf{x}(at + b, t)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Calcula su curvatura. ¿Cuándo se anula?

iv) Demuestra que S es bilateral y calcula un campo vectorial normal unitario.

v) ¿Para qué valores $(u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ existe una carta $\mathbf{y} : U \to \mathbf{x}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ de la forma $(u, v) \mapsto (u, h(u, v), v)$ para alguna función h y tal que $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ está en la imagen de $\mathbf{y}$?