UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA — Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS — 13 de septiembre de 2022

Geometría de Curvas y Superficies

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- En los dos primeros problemas la nota de cada apartado b)-c)) es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo de curvas planas o espaciales, según el problema.
- Si P_N^n es la nota del apartado [**N**]n), la nota global se calcula con la siguiente fórmula:

$$\frac{3(P_1+P_2)+4P_3}{10}, \quad P_N = \frac{P_N^a+P_N^b+P_N^c}{3}, \quad N=1,2,3.$$

- Razona todas las respuestas.

[1] a) Sean $\mathbf{x}: I \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y}: J \to \mathbb{R}^2$, curvas regulares tales que $\mathbf{x}$ está parametrizada por el arco, $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos abiertos.

(i) Define el diedro de Frenet y la curvatura de $\mathbf{x}$. Usa las fórmulas de Leibnitz para deducir el valor de la derivada del campo vectorial normal.

(ii) Expresa la derivada de los campos tangente y normal de $\mathbf{y}$ usando dichos campos, la curvatura y la norma de la derivada.

(iii) Supón que $\mathbf{t_y}(t) = (\cos\alpha(t), \operatorname{sen}\alpha(t))$, donde $\alpha: J \to \mathbb{R}$ es una función $\mathcal{C}^\infty$. Usa esta función para expresar la curvatura de $\mathbf{y}$.

b) Identificando $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ consideremos la curva $\mathbf{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\mathbf{x}(t) := e^{tz+w}$, donde $z \in \mathbb{C}^*$, $w \in \mathbb{C}$.

(i) ¿Es regular?

(ii) Calcula la función longitud $L(t) := \displaystyle\int_0^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\|\, d\tau$.

(iii) Calcula $\mathbf{t_x}$, $\mathbf{n_x}$ y $\kappa_\mathbf{x}$.

(iv) Encuentra la evoluta $\mathbf{y}$ de $\mathbf{x}$.

(v) ¿Puedes poner $\mathbf{y}$ como una función de $\mathbf{x}$?

c) Sea $\mathbf{x}: I \to \mathbb{R}^2$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, una curva regular, $a \in \mathbb{R}$. Considera la curva $\mathbf{x}_a: I \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{x}_a(t) := \mathbf{x}(t) + a\mathbf{t_x}(t)$.

(i) Sea $h: J \to I$ un difeomorfismo creciente tal que $\mathbf{y} := \mathbf{x} \circ h$ está parametrizada por el arco. Demuestra que $\mathbf{y}_a = \mathbf{x}_a \circ h$ (usa esto para simplificar los apartados siguientes).

(ii) Determina cuándo es regular $\mathbf{x}_a$ y calcula su curvatura.

(iii) Supón que $\mathbf{x}$ es cerrada. Relaciona la curvatura total de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_a$.

[2] a) Sea I un intervalo abierto, $0 \in I$, y sea $\mathbf{x}: I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular.

i) Define el triedro de Frenet cuando sea posible (y especifica cuándo lo es).

ii) Supón que hay una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en I tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mathbf{x}(t_n)$ está en la recta tangente a $\mathbf{x}$ en $t=0$. Demuestra que $\kappa(0)=0$.

iii) Supón que $\mathbf{x}$ es birregular. Demuestra que el límite cuando $t \to 0$ de los planos afines determinados por $\mathbf{x}(t)$ y la recta tangente a $\mathbf{x}$ en $t=0$ es el plano afín osculador a $\mathbf{x}$ en $t=0$.

b) Sea $\mathbf{x}: I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular. Diremos que $\mathbf{x}$ es una hélice si las rectas tangentes a $\mathbf{x}$ tienen ángulo constante con respecto a una dirección fija, es decir si existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{u}\| = 1$, tal que la función $h_\mathbf{t}: I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \langle \mathbf{t_x}(t), \mathbf{u}\rangle$, es constante.

i) Considera una función $h_{\mathbf{b}}$ definida de manera similar (para el campo bitangente y con el mismo vector). Demuestra que si $\mathbf{x}$ es una hélice entonces $h_{\mathbf{b}}$ también es constante y relaciona las dos constantes.

ii) Demuestra que si $\mathbf{x}$ es una hélice entonces $\frac{\tau_{\mathbf{x}}}{\kappa_{\mathbf{x}}}$ es constante.

iii) Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva dada por $\mathbf{x}(t) = (at, bt^2, t^3)$, $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de a, b es $\mathbf{x}$ una hélice?

c) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por el arco cuya torsión no se anula nunca.

i) Dado $t_0 \in I$, la *recta polar* a $\mathbf{x}$ para t_0 es la recta que pasa por $\mathbf{x}(t_0) + \frac{1}{\kappa_{\mathbf{x}}(t_0)}\mathbf{n}_{\mathbf{x}}(t_0)$ y es ortogonal al plano osculador. Demuestra que el centro de la esfera osculatriz está en la recta polar.

ii) Sea $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^3$ la curva de los centros de las esferas osculatrices. Estudia su regularidad, los planos osculadores y las rectas tangentes.

iii) Sean $a \neq 0$ e $\mathbf{y}_a : I \to \mathbb{R}^3$ la curva dada por $\mathbf{y}_a(t) := \mathbf{x}(t) + a\mathbf{t}_{\mathbf{x}}(t)$. Estudia la regularidad de $\mathbf{y}_a$ y comprueba que su plano normal pasa por el centro del círculo osculador.

[3] a) i) Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva $\mathcal{C}^\infty$ y sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ vector unitario tal que $(\mathbf{u}, \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(t))$ son linealmente independientes $\forall t \in I$. Construye una curva $\boldsymbol{\delta} : I \to \mathbb{R}^3$ contenida en un plano ortogonal a $\mathbf{u}$ tal que las aplicaciones $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dadas por $\mathbf{x}(u, v) := \boldsymbol{\gamma}(u) + v\mathbf{u}$, $\mathbf{y}(u, v) := \boldsymbol{\delta}(u) + v\mathbf{u}$ definen superficies parametrizadas (cilíndricas) con la misma imagen.

ii) Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ una curva $\mathcal{C}^\infty$ tal que $(\boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(t))$ son linealmente independientes $\forall t \in I$. Construye una curva $\boldsymbol{\delta} : I \to \mathbb{S}^2$ tal que las aplicaciones $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dadas por $\mathbf{x}(u, v) := v\boldsymbol{\gamma}(u)$, $\mathbf{y}(u, v) := v\boldsymbol{\delta}(u)$ definen superficies parametrizadas (cónicas) con la misma imagen.

iii) Encuentra una curva $\boldsymbol{\gamma}$ como en i) sin autointersecciones tal que la curva $\boldsymbol{\delta}$ sí que las tenga.

b) Sea S una superficie regular.

(i) Demuestra que si todas las rectas normales de S pasan por un punto $\mathbf{p}$, entonces S está contenida en una esfera.

(ii) Sea π un plano afín tal que $S \cap \pi = \{\mathbf{p}\}$. Demuestra que π es el plano tangente afín a S en $\mathbf{p}$.

(iii) Supón que $S = \mathbf{x}_1(U_1) \cup \mathbf{x}_2(U_2)$, donde $\mathbf{x}_i : U_i \to S$ son cartas, $i = 1, 2$, y que $\mathbf{x}_1(U_1) \cap \mathbf{x}_2(U_2)$ es conexo. Demuestra que S es orientable.

c) Sea $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la hélice circular dada por

$$\boldsymbol{\gamma}(t) := (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$$

con $a, b > 0$ y $a^2 + b^2 = 1$. Consideremos la aplicación $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(u, v) := \boldsymbol{\gamma}(u) + v\mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(u)$. Sea $S := \mathbf{x}(\mathbb{R}^2)$.

(i) Demuestra que S es una superficie regular, reglada y orientable. Elige un campo normal unitario.

(ii) Encuentra la línea de estricción de esta superficie reglada.

(iii) Dado $t \in \mathbb{R}$ calcula la proyección normal de $\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ en $T_{\boldsymbol{\gamma}(t)}S$.