UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
FACULTAD DE CIENCIAS

Grado de Matemáticas
10 de junio de 2022

Geometría de Curvas y Superficies

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- En los dos primeros problemas la nota de cada apartado b)-c)) es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo de curvas planas o espaciales, según el problema.
- Si P_N^n es la nota del apartado **[N]**n), la nota global se calcula con la siguiente fórmula:

$$\frac{3(P_1+P_2)+4P_3}{10}, \quad P_N = \frac{P_N^a + P_N^b + P_N^c}{3}, \quad N = 1, 2, 3.$$

- Razona todas las respuestas.

[1] a) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto.

(i) Sea $h : J \to I$ una reparametrización (h difeomorfismo con $h' > 0$). ¿Cómo debe de ser h para que $\mathbf{x} \circ h$ también esté parametrizada por el arco?

A partir de ahora identificamos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$. Sea $\mathbf{t} = \mathbf{x}'$ el campo vectorial tangente.

(ii) Define el campo vectorial normal $\mathbf{n}$ y exprésalo en función de $\mathbf{t}$ usando notación compleja.

(iii) Supón que $\mathbf{t} = e^{i\alpha(t)}$. Relaciona esta función con la curvatura κ.

(iv) Supón que $\mathbf{x}(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$. ¿Qué deben de cumplir r, θ para que la curva esté parametrizada por el arco?

b) Consideremos la curva $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\mathbf{x}(t) := e^{tz}$, donde $z \in \mathbb{C}^*$.

(i) ¿Es regular?

(ii) Calcula la función longitud $L(t) := \int_0^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\| \, d\tau$.

(iii) Calcula $\mathbf{t}_\mathbf{x}$, $\mathbf{n}_\mathbf{x}$ y $\kappa_\mathbf{x}$.

(iv) Encuentra la evoluta $\mathbf{y}$ de $\mathbf{x}$.

(v) ¿Puedes poner $\mathbf{y}$ como una función de $\mathbf{x}$?

c) Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular cerrada de periodo $T > 0$. La *curvatura total* de $\mathbf{x}$ se define como

$$\kappa_\mathbf{x}^{\text{tot}} := \int_0^T \kappa_\mathbf{x}(t) \, \|\mathbf{x}'(t)\| \, dt.$$

(i) Demuestra que la curvatura total no cambia si reparametrizamos la curva, es decir, si definimos $\mathbf{y} := \mathbf{x} \circ h$, donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un difeomorfismo creciente tal que existe $T' > 0$ cumpliendo $h(t + T') = h(t) + T$, entonces $\kappa_\mathbf{x}^{\text{tot}} = \kappa_\mathbf{y}^{\text{tot}}$.

(ii) Calcula la curvatura total de una parametrización antihoraria de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(iii) Deduce, sin hacer la integral, el valor de la curvatura total de $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{x}(t) := \cos t (1, \operatorname{sen} t).$$

[2] a) Sea I un intervalo abierto, $0 \in I$, y sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular.

i) Define el triedro de Frenet cuando sea posible (y especifica cuándo lo es).

ii) Supón que hay una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en I tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mathbf{x}(t_n)$ está en la recta tangente a $\mathbf{x}$ en $t = 0$. Demuestra que $\kappa(0) = 0$.

iii) Supón que $\mathbf{x}$ es birregular. Demuestra que el límite cuando $t \to 0$ de los planos afines determinados por $\mathbf{x}(t)$ y la recta tangente a $\mathbf{x}$ en $t = 0$ es el plano afín osculador a $\mathbf{x}$ en $t = 0$.

b) Sea $F : I \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$, $0 \in I$, y sea $h : J \to I$ otra función $\mathcal{C}^\infty$ tal que $h(0) = 0$ y $h'(0) \neq 0$. Sea $G := F \circ h$.

i) Demuestra que dado $n > 0$, $F'(0) = F''(0) = \cdots = F^{(n)}(0) = 0$ es equivalente a $G'(0) = G''(0) = \cdots = G^{(n)}(0) = 0$.

Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $\kappa(0)\tau(0) \neq 0$ y sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{x}(I)$. Sea $F_\mathbf{p} : I \to \mathbb{R}$ dada por $F_\mathbf{p}(t) := \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{p}\|^2$.

ii) ¿Para qué puntos $\mathbf{p}$ se tiene $F'_\mathbf{p}(0) = 0$?

iii) ¿Para qué puntos $\mathbf{p}$ se tiene $F'_\mathbf{p}(0) = F''_\mathbf{p}(0) = 0$?

iv) ¿Para qué puntos $\mathbf{p}$ se tiene $F'_\mathbf{p}(0) = F''_\mathbf{p}(0) = F'''_\mathbf{p}(0) = 0$?

c) Dado $b > 0$ considera el elipsoide de ecuación $x^2 + y^2 + (bz)^2 = 1$ y el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = x$.

i) Construye una curva regular cerrada $\mathbf{x}$ cuya imagen es la intersección del elipsoide y del cilindro.

ii) Para los valores de $t \in \mathbb{R}$ que cumplen $\mathbf{x}(t) = (1, 0, 0)$ encuentra el triedro de Frenet.

iii) Sean t_0, t_1 dos valores como en el apartado anterior que no difieran por un múltiplo del periodo de $\mathbf{x}$. Justifica que $\kappa(t_0) = \kappa(t_1)$ y $\tau(t_0) = -\tau(t_1)$ sin calcular ni la curvatura ni la torsión.

iv) Encuentra una elipse cuya longitud coincida con la longitud de la curva $\mathbf{x}$.

[3] a) i) Dada una curva $\boldsymbol{\gamma} : I \to \pi$, π plano afín, y dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ vector unitario ortogonal a π define la superficie cilíndrica asociada como superficie parametrizada.

ii) Demuestra que la imagen de la superficie parametrizada define una superficie regular si $\boldsymbol{\gamma}$ es o bien homeomorfismo sobre la imagen o bien cerrada simple.

iii) ¿Sigue siendo cierto si tomamos $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular homeomorfismo sobre la imagen y $\mathbf{u}$ un vector unitario cualquiera?

iv) Supón que en el primer apartado solo pedimos que $\mathbf{u} \notin \vec{\pi}$. Demuestra que la superficie obtenida también se puede obtener como en el primer apartado (es decir, a partir de una curva contenida en un plano perpendicular a $\mathbf{u}$).

b) Sea $I = (0, a) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto con $0 < a \leq \infty$ y sea $\boldsymbol{\gamma} : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\gamma}(t) := (tx(t^2), y(t^2))$ una curva regular, tal que $x, y : (-\sqrt{a}, \sqrt{a}) \to \mathbb{R}$ son $\mathcal{C}^\infty$ y $x(t) > 0$ si $t > 0$. Además, suponemos que $\boldsymbol{\gamma}$ es un homeomorfismo sobre la imagen. Considera la superficie de revolución S definida por $\boldsymbol{\gamma}_{|(0,a)}$.

(i) Asumiendo ya que es superficie parametrizada, demuestra que es superficie regular.

(ii) Demuestra que $\overline{S} \subset \mathbb{R}^3$ también es superficie regular.

(iii) Aplícalo al paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$.

c) Sea $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la hélice circular dada por

$$\boldsymbol{\gamma}(t) := (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$$

con $a, b > 0$ y $a^2 + b^2 = 1$. Consideremos la aplicación $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(u, v) := \boldsymbol{\gamma}(u) + v\mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(u)$. Sea $S := \mathbf{x}(\mathbb{R}^2)$.

(i) Demuestra que S es una superficie regular, reglada y orientable. Elige un campo normal unitario.

(ii) Encuentra la línea de estricción de esta superficie reglada.

(iii) Dado $t \in \mathbb{R}$ calcula la proyección normal de $\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ en $T_{\boldsymbol{\gamma}(t)}S$.