UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA — Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS — 9 de septiembre de 2021

Geometría de Curvas y Superficies

Primer parcial

- *Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.*
- *Cada apartado se puntúa sobre 10.*
- *La nota de los apartados b) y c) de* **[1]** *es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo de curvas planas.*
- *La nota de los apartados b) y c) de* **[2]** *es el máximo de lo obtenido en dicho apartado y de la nota del trabajo de curvas espaciales.*
- *Si* P_N^n *es la nota del apartado* [**N**]n), *la nota global se calcula con la siguiente fórmula:*

$$\frac{3(P_1+P_2)+4P_3}{10}, \quad P_N = \frac{P_N^a + P_N^b + P_N^c}{3}.$$

- *Razona todas las respuestas.*

[1] a) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^2$, I intervalo de $\mathbb{R}$, una curva regular.
(i) Determina cómo se puede encontrar una función biyectiva diferenciable $h : J \to I$, J intervalo de $\mathbb{R}$, $h' > 0$, tal que $\mathbf{x} \circ h$ esté parametrizada por el arco.
(ii) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\mathbf{t_x}(t) = (\cos\alpha(t), \operatorname{sen}\alpha(t))$. Determina $\mathbf{n_x}$ y $\kappa_\mathbf{x}$ en función de α.

b) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular cerrada simple (con curvatura positiva) y denotemos $\mathbf{n_x}$ su campo vectorial normal. Definimos otra curva $\mathbf{x}_\lambda : I \to \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\mathbf{x}_\lambda(t) := \mathbf{x}(t) + \lambda\mathbf{n_x}(t)$.
(i) Justifica que en los siguientes apartados puedes suponer que la curva $\mathbf{x}$ está parametrizada por el arco.
(ii) ¿Bajo qué condiciones $\mathbf{x}_\lambda$ es regular? ¿Es cerrada?
(iii) Calcula la curvatura y los campos vectoriales tangente y normal de $\mathbf{x}_\lambda$.

c) Demuestra que $\exists\varepsilon > 0$ tal que si $|\lambda| < \varepsilon$, entonces $\mathbf{x}_\lambda$ es regular cerrada simple.

d) Considera la curva $\mathbf{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{x}(t) := (3t^2, 2t^3)$.
(i) Comprueba si es una curva regular, calcula la longitud y la curvatura en $(0,1)$ con los límites en los extremos.
(ii) Reparametriza la curva $\mathbf{x}$ por el arco. Estudia la derivabilidad en los extremos.

[2] a) Define el triedro de Frenet, la curvatura, la torsión y expresa las derivadas del triedro en función del propio triedro para una curva birregular espacial (no necesariamente parametrizada por el arco).

b) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular. Sea $\Omega_\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ dado por $\Omega_\mathbf{x} := \tau_\mathbf{x}\mathbf{t_x} + \kappa_\mathbf{x}\mathbf{b_x}$.
(i) Da una expresión lo más simple posible de $\Omega_\mathbf{x} \times \mathbf{t_x}$, $\Omega_\mathbf{x} \times \mathbf{n_x}$ y $\Omega_\mathbf{x} \times \mathbf{b_x}$.
(ii) Calcula $\Omega'_\mathbf{x}$. ¿Qué tipo de curva es $\mathbf{x}$ si $\Omega_\mathbf{x}, \Omega'_\mathbf{x}$ son linealmente dependientes?

(iii) Supón que $\Omega_{\mathbf{x}}, \Omega'_{\mathbf{x}}$ son siempre linealmente independientes. Calcula el signo de $\langle \Omega_{\mathbf{x}} \times \Omega'_{\mathbf{x}}, \Omega''_{\mathbf{x}} \rangle$.

c) Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(t) := (\cos 2t, \cos t, \operatorname{sen} 3t)$.

(i) Demuestra que $\mathbf{x}$ es una curva regular y cerrada.

(ii) Calcula el ángulo de las rectas tangentes y normales a $\mathbf{x}$ con el eje Y.

(iii) Demuestra que no es simple y calcula el ángulo entre las rectas tangentes en alguno de los puntos donde deja de ser simple.

[3] a) Sea S una superficie regular.

(i) ¿Qué es una curva en S?

(ii) Define el plano vectorial tangente.

(iii) Define vector normal a S en un punto y descríbe los vectores normales en términos de una carta cuya imagen contenga al punto.

b) Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por el arco cuya torsión no se anula nunca. Denotemos $\rho := \sqrt{\kappa_\gamma^2 + \tau_\gamma^2}$ y $\theta : I \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\kappa_\gamma = \rho \cos\theta$ y $\tau_\gamma = \rho \operatorname{sen}\theta$. Sea $\mathbf{d}_\gamma := \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{t}_\gamma + \cos\theta\, \mathbf{b}_\gamma$.

(i) Sea $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}(u, v) := \boldsymbol{\gamma}(u) + v\mathbf{d}_\gamma(u)$. ¿Dónde es $\mathbf{x}$ una superficie parametrizada?

(ii) Donde $\mathbf{x}$ sea una superficie parametrizada calcula el normalizado de $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$.

(iii) Demuestra que $\mathbf{x}$ deja de ser superficie parametrizada a lo largo de una curva, calcula dicha curva y su vector tangente.

c) Sean $S_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ z \geq 0\}$ y $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ z > 0\}$.

(i) Demuestra que S es una superficie regular.

(ii) Supón que S_0 es una superficie regular y considera $T_{\mathbf{0}}S_0$ (mediante la definición original). Encuentra tres vectores linealmente independientes en $T_{\mathbf{0}}S_0$ y deduce que S_0 no es una superficie regular.