
Topología General

¿Qué ejercicios tienes que hacer?

Si solo has de realizar la primera parte: Ejercicios 1, 2, 3 y 4

Si solo has de realizar la segunda parte: Ejercicios 5, 6, 7 y 8

Si has de realizar ambas partes: Ejercicios 3, 4, 5 y 6

Ejercicio 1 (2,5 puntos). Sea X un conjunto cualquiera y $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ topologías definidas sobre él. Dado $x \in X$, denotaremos por $\mathcal{B}_i^x$ una cierta base de entornos para la topología $\mathcal{T}_i$ (con $i = 1, 2$). Demuestra que $\mathcal{T}_2$ es más fina que $\mathcal{T}_1$ si y solo si $\forall x \in X$ y $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1^x$, $\exists B_2 \in \mathcal{B}_2^x$ tal que $B_2 \subseteq B_1$.

Ejercicio 2 (3 puntos). Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y $c < d$, definimos el rectángulo cerrado $C_{a,b,c,d} = [a, b] \times [c, d]$. Consideremos el conjunto X de todos los posibles rectángulos, es decir,

$$X = \{C_{a,b,c,d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b \text{ y } c < d\}.$$

Para dotar a X de una topología definimos los siguientes subconjuntos de X :

$$B_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \{C \in X \mid C \subset (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)\},$$

que es el conjunto de todos los rectángulos cerrados que entran dentro de un cierto rectángulo abierto.

- (i) ¿Qué condiciones tiene que cumplir una familia de $\mathcal{P}(X)$ para ser base de alguna topología de X ?
- (ii) Demuestra que la familia $\mathcal{B} = \{B_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$ es base de alguna topología.
- (iii) ¿Es este espacio T_2 ? ¿Puede existir una función distancia sobre X que proporcione esa topología? Si es así, construye una.

Ejercicio 3 (2,5 puntos). Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y abierta entre espacios topológicos. Demuestra que si $B \subseteq Y$, entonces $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.

Ejercicio 4 (2 puntos). Sea X un espacio topológico 1 numerable. Demuestra que $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si toda sucesión convergente $S \subseteq A$ tiene límite en A (Recuerda que puedes tomar bases de entornos encajados).

Ejercicio 5 (3 puntos). Sea X un conjunto infinito no numerable y dótalo de la topología connumerable $\mathcal{T}_{\text{CN}} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es contable}\} \cup \{\emptyset\}$.

- (i) ¿Qué subconjuntos $K \subset X$ son compactos?
- (ii) Estudia la conexión por caminos de X .
- (iii) Toma otra $\mathcal{T}$ topología cualquiera sobre X . Considera $X \times X$ con la topología producto de $(X, \mathcal{T}_{\text{CN}})$ y $(X, \mathcal{T})$. Demuestra que el siguiente espacio cociente es conexo

$$X \times X / (x, x) \sim (y, y) \forall x, y \in X.$$

Ejercicio 6 (2,5 puntos). Sea X un espacio topológico. Demuestra que:

- (i) X es conexo si y solo si no existe ningún conjunto propio con frontera vacía.
- (ii) Si X es compacto y localmente conexo, entonces el número de componentes conexas es finito.

Ejercicio 7 (2,5 puntos). Considera los espacios productos $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e $Y = \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ donde los factores están dotados de la topología discreta. ¿Son homeomorfos? Justifica tu respuesta. (Recuerda que $\{0, 1\}^2$ es homeomorfo a $\{0, 1, 2, 3\}$.)

Ejercicio 8 (2 puntos). Sea X un espacio compacto. Demuestra que si hacemos la construcción de la compactificación de Alexandrov con X el resultado no es conexo.