Topología General

Ejercicio 1.

(a) Sea X un espacio topológico. Demuestra que la unión de una colección finita de subconjuntos compactos de X es un conjunto compacto.

(b) Demuestra que, si X es Hausdorff, la intersección arbitraria de subconjuntos compactos de X es también compacta.

(c) Demostrar que si X es compacto y localmente conexo, entonces tiene un número finito de componentes conexas.

(d) Si X es totalmente disconexo. Demuestra que $X^{\mathbb{N}}$ también lo es.

Ejercicio 2.

(a) Sean A y B dos subespacios conexos de un espacio topológico X, tales que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Demuestra que $A \cup B$ es conexo.

(b) Sea X localmente compacto, T_2 y con todas sus componentes conexas no compactas. Demuestra que su compactificación de Alexandrov es conexa.

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico. Definimos la suspensión de X como el conjunto cociente SX del espacio $X \times [-1, 1]$ por la relación que identifica

$$(x, 1) \sim (y, 1), \qquad (x, -1) \sim (y, -1)$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

(a) Demuesta que $x \in X \mapsto \pi(x, 0)$ es un homeomorfismo sobre la imagen donde π es la aplicación cociente $\pi : X \times [-1, 1] \to SX$.

(b) Demuestra que SX es localmente conexo por caminos si y solo si X lo es.

(c) Demuestra que $S\{0, 1\}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Ejercicio 4. Considera la siguiente topología sobre $\mathbb{R}$

$$\mathcal{T}_K = \{U \in \mathcal{T}_u \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ es compacto}\} \cup \{\emptyset\}$$

donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual de la recta real. Considera el subespacio de $\mathbb{R}$

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n, 2n + 1]$$

(a) ¿Es X conexo? ¿y localmente conexo?

(b) Considera ahora la relación que identifica dos puntos $x, y \in X$ si $x - y \in \mathbb{Z}$ ¿Cómo es el espacio cociente resultante?