UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA — Grado de Matemáticas
FACULTAD DE CIENCIAS — 6 de julio de 2023

Geometría de Curvas y Superficies

Primer parcial

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Las tres preguntas tienen el mismo valor.
- Razona todas las respuestas.

[1] a) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizada por el arco.

(i) Define los círculos osculadores y la evoluta $\mathbf{y}$.

(ii) Demuestra que la recta normal a $\mathbf{x}$ en $t = t_0$ es la recta tangente a $\mathbf{y}$ en $t = t_0$.

b) Sea $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\rho(\theta) := \operatorname{sen} 3\theta$.

i) Demuestra que define una curva regular en coordenadas polares (flor de tres pétalos).
ii) Encuentra una ecuación polinómica en coordenadas cartesianas.
iii) Calcula su curvatura.

[2] a) Sea $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular y sea $\mathbb{S}$ una esfera de centro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ y radio $r > 0$.

i) Define el contacto de la curva y la esfera en $t = t_0 \in I$.
ii) Define la esfera osculatriz y describe su centro y radio.
iii) Calcula el vector velocidad de la curva que definen los centros de las esferas osculatrices.

Se define el campo vectorial de Darboux $\mathbf{D} := \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$.

iv) Verifica que se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{t}' = \mathbf{D}, \qquad \mathbf{n}' = \mathbf{D} \times \mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}' = \mathbf{D} \times \mathbf{b}.$$

v) Expresa $\mathbf{D}'$ y $\mathbf{D} \times \mathbf{D}'$ en función del triedro de Frénet; ¿qué debe ocurrir para que este último no se anule?

b) Considera la curva espacial $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(t) := (\cos 3t, \operatorname{sen} 3t, \cos t)$.
i) Demuestra que es cerrada, calcular el periodo y demuestra que no es simple.
ii) Calcula las rectas tangentes y los planos osculadores en el punto donde no es simple.

[3] a) Define superficies usando solo grafos de funciones diferenciables. Aplícalo a una esfera.

b) Sea S una superficie regular conexa y compacta.

i) Supón que existe $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ que está en todas las rectas normales de S. Sea $\mathbf{x} : U \to S$ una carta. Demuestra que $\mathbf{x}(U)$ está contenida en una esfera. ¿Cuál es el centro?

ii) Prueba que S es una esfera.

iii) Sea $\mathbf{p} \in S$ tal que existe un plano afín π que cumple que $\mathbf{p}$ es un punto aislado de $S \cap \pi$. Demuestra que π es el plano tangente afín de S en $\mathbf{p}$.

iv) Encuentra un ejemplo en el que $\mathbf{p}$ no es punto aislado de $S \cap \pi$ donde π es el plano tangente afín a S en $\mathbf{p}$.