UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA — Grado de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS — 3 de julio de 2024

Geometría de Curvas y Superficies

Primer parcial

- Cada una de las preguntas se empieza en una hoja distinta.
- Cada apartado se puntúa sobre 10.
- Las tres preguntas tienen el mismo valor.
- Razona todas las respuestas.

[1] a) Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por el arco.

i) Define la curvatura κ de γ.

ii) Sea $t_0 \in I$ tal que $\kappa(t_0) > 0$. Demuestra que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\mathbf{t}(t_0), \mathbf{t}(t))$ es base positiva de $\mathbb{R}^2$ para $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$.

iii) ¿Qué puedes decir si $\kappa(t_0) < 0$?

b) Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular, $t_0 \in I$.

(i) Supón que existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en I, $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$, tal que $\kappa(t_n) = 0$. Demuestra que $\kappa(t_0) = 0$.

(ii) Supón que existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en I, $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$, tal que $\gamma(t_n)$ está en la recta tangente a γ en t_0. Demuestra que $\kappa(t_0) = 0$.

Recuerda que si L es una recta de $\mathbb{R}^2$, $P \in L$, $Q \notin L$, existe una única circunferencia que pasa por P, Q y es tangente a L en P.
Dado $t \in I$, $t \neq t_0$, tal que $\gamma(t)$ no está en la recta tangente a γ en t_0, denotamos $\mathbf{y}(t)$ el centro de la única circunferencia que pasa por $\gamma(t_0), \gamma(t)$ y que es tangente a γ en $\gamma(t_0)$.

(iii) Supón que $\kappa(t_0) \neq 0$ y sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en I tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ y $\gamma(t_n)$ no está en la recta tangente a γ en t_0. Demuestra que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{y}(t_n)$ es el centro de curvatura de γ en t_0.

(iv) Considera la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\setminus\{0\} &\xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(t, \frac{\operatorname{sen} t}{\exp(t^{-2})}\right). \end{aligned}$$

Justifica que admite extensión continua a $\mathbb{R}$.

(v) La extensión de γ de (iv) es de hecho $\mathcal{C}^\infty$ y curva regular. Estudia los ceros y signos de su curvatura κ.

[2] a) Considera una curva regular $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Define los planos osculador, normal y rectificante y enuncia las condiciones que necesita la curva para que cada uno de ellos se pueda definir.

b) Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular (parametrizada por el arco para simplificar).

(i) Dado $t_0 \in I$ demuestra que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall t \in I$, $0 < |t - t_0| < \varepsilon$, se tiene que $\gamma(t)$ no está en la recta tangente a γ en t_0.

(ii) Dado $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \cup (t_0, t_0 + \varepsilon)$ sea $\pi(t)$ el plano afín que contiene $\gamma(t)$ y la recta tangente a γ en t_0. Encuentra un vector unitario $\mathbf{u}(t)$ normal a $\pi(t)$.

(iii) Elige el vector unitario $\mathbf{u}(t)$ de (ii) de manera que $\mathbf{u} : (t_0, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ sea $\mathcal{C}^\infty$. Calcula $\lim_{t \to t_0^+} \mathbf{u}(t)$.

(iv) Sean $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, la curva dada por $\gamma(t) = (6t - t^3, 10t^3 - 3t^5, 5t^4 - 2t^6)$. Comprueba que es regular y busca dónde es birregular.

(v) Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ un valor aislado donde has calculado que la curva no es birregular. Calcula los límites laterales del campo vectorial normal y justifica si tiene sentido extender el concepto de plano osculador y rectificante a t_0.

[3] Sea S una superficie regular.

a) Define la noción de bilateralidad de S y demuestra que la imagen de una carta es bilateral.

b) Sea $\mathbf{N} : S \to \mathbb{S}^2$ un campo vectorial normal unitario. Decimos que una carta $\mathbf{x} : U \to S$ es una *carta de disco unitario* si $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$.

(i) Demuestra que S es la unión de imágenes de cartas de disco unitario.

(ii) Sea $\mathbf{x}$ una carta de disco unitario. Da una fórmula para $\mathbf{N}_\mathbf{x} := \mathbf{N} \circ \mathbf{x}$.

(iii) Sea $\mathbf{x}$ una carta de disco unitario. Demuestra que existe $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ tal que la aplicación

$$\begin{aligned} \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < \varepsilon^2\} &\xrightarrow{\mathbf{x}_\varepsilon} \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \mathbf{x}(u, v) + \varepsilon \mathbf{N}_\mathbf{x}(u, v), \end{aligned}$$

es una carta de una superficie $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

(iv) Fija la carta $\mathbf{x}$ y el valor $\varepsilon := \frac{\varepsilon_0}{2}$ de (iii). Compara $\mathbf{N}_\mathbf{x}$ y $\mathbf{N}_{\mathbf{x}_\varepsilon}$.

(v) Toma $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(u, v) := (u, v, u^2 + v^2)$. Demuestra que es una carta y calcula un valor ε_0 que sirva para (iii).